STOCHASTICKÁ ANALÝZA NESTACIONÁRNÍCH PROCESŮ V MATLABU

David Kvapil

UNIS, a.s., Brno

Abstrakt

Příspěvek popisuje stochastickou analýzu a matlabovské modelování nestacionárních procesů v technometrii. Sumarizují se známé poznatky o stabilizaci trendu i rozptylu, navrhuje se možný způsob řešení situace, kdy data vykazují nestacionaritu ve střední hodnotě i v rozptylu. Empiricky zjištěná provozní teplárenská data, tvořící vysokofrekvenční časové řady, se vyznačují v čase proměnlivou variabilitou (měnlivá volatilita), což vede k vážným problémům při použití klasických lineárních (S)AR(I)MA modelů (nesplnění homoskedasticity a normality). Jsou pozorovány shluky volatility, je indikováno leptokurtické pravděpodobnostní rozdělení. Je použito GARCH modelování, pracující s (v čase se měnícími) podmíněnými statistikami – podmíněnou střední hodnotou a podmíněným rozptylem. Pro samotnou analýzu byly vytvořeny vlastní matlabovské skripty, stejně jako jsou využívány běžné matlabovské funkce statistického, optimalizačního a GARCH toolboxu. Na provozních datech je konkrétně demonstrován postup při vybudování GARCH modelu.

1 Stabilizace trendu

Při modelování reálných provozních teplárenských dat se dospělo k situaci, kdy zkoumané časové řady měřených fyzikálních veličin vykazovaly nestacionaritu ve střední hodnotě i nestacionaritu v rozptylu. Pokusíme se sumarizovat známé poznatky o stabilizaci trendu i rozptylu, navrhnout možný způsob řešení takovéto situace a na ukázkovém příkladě naznačíme konkrétní postup stochastické analýzy a modelování ARCH procesů v Matlabu.

Pro procesy nestacionární ve střední hodnotě rozlišujeme deterministický trend a stochastický trend. U deterministického trendu chápeme nestacionaritu jako funkci času, tj. k modelování používáme např. polynomický trend, příp. periodický trend

$$f(t)=\beta_0+\beta_1 t+\ldots+\beta_d t^d \text{, resp. } f(t)=\mu+\sum_{j=1}^{p}\left(\alpha_j\cos\lambda_j t+\beta_j\sin\lambda_j t\right).$$

Pro modely $\mathrm{ARMA}(p,q)$: $\Phi(B)Y_t=\Theta(B)\varepsilon_t$ je požadováno, aby proces byl kauzální, tj. všechny kořeny polynomu $\Phi(z)=1-\varphi_1 z-\ldots-\varphi_p z^p$ ležely vně jednotkové kružnice. Pokud nějaký kořen leží na jednotkové kružnici, mluvíme o procesu nestacionárním se stochastickým trendem, pokud leží uvnitř jednotkového kruhu, mluvíme o nestacionárním procesu explozivního typu. Nestacionární proces obsahující stochastický trend lze převést na stacionární diferencováním. Zavedeme diferenční operátor

$$\Delta Y_t=Y_t-Y_{t-1}=(1-B)Y_t,$$

$$\Delta^2 Y_t=\Delta(\Delta Y_t)=\Delta(Y_t-Y_{t-1})=Y_t-2Y_{t-1}+Y_{t-2}=(1-B)^2 Y_t,$$

$$\vdots$$

$$\Delta^d Y_t=Y_t-\binom{d}{1}Y_{t-1}+\binom{d}{2}Y_{t-2}-\ldots+(-1)^d Y_{t-d}=(1-B)^d Y_t.$$

Nestacionární proces se stochastickým trendem se nazývá integrovaný smíšený model $\mathrm{ARIMA}(p,d,q)$, formálně jej zapisujeme pomocí operátoru zpětného chodu

$$\text{ARIMA}(p,d,q):\ \Phi(B)(1-B)^d Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

a položíme-li $W_t = (1-B)^d Y_t$, pak je W_t stacionární $\text{ARMA}(p,q)$ proces.

Poznamenejme, že číslo d nemusí být obecně celé. Pak jej nazýváme frakcionální parametr, operátor $\Delta^d = (1-B)^d$ vyjadřuje frakcionální diferenci a hovoříme o frakcionálně integrovaných procesech $\text{ARFIMA}(p,d,q)$. Jde o procesy s dlouhou pamětí, jejich charakteristickou vlastností je, že hodnoty ACF neklesají s rostoucím zpožděním exponenciálně, ale hyperbolicky.

2 Stabilizace rozptylu

Procesy, kde není splněna podmínka neměnnosti rozptylu v čase (homoskedasticita), je většinou možné vhodně transformovat. Situace nestabilního rozptylu nastává především v případech, kdy náhodná veličina Y_t má rozdělení závislé na jediném parametru, který obecně nemusí mít pro všechna t stejnou hodnotu. Hledá se pak netriviální funkce g tak, aby náhodná veličina $Z_t = g(Y_t)$ měla rozptyl nezávisející na t. Tato úloha obecně nemá řešení, používá se však určitých užitečných aproximací.

Při předpokladu exponenciální závislosti směrodatné odchylky na střední hodnotě $\sigma_t = \sigma_0 \mu_t^{\Theta}$ se nejčastěji se uvažují případy od $\Theta = 0$ (řada je homoskedastická) až po $\Theta = 1$ (pak existuje lineární závislost). Při volbě $\lambda = 1 - \Theta$ lze odstranit heteroskedasticitu (pro řadu $Y_t > 0$) např. jednou z následujících transformací:

Box – Coxova mocninná transformace

$$Z_t = \begin{cases} \dfrac{Y_t^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{pro } \lambda \neq 0, \\ \ln(Y_t) & \text{pro } \lambda = 0, \end{cases}$$

příp. mocninná transformace

$$Z_t = \begin{cases} Y_t^{\lambda} & \text{pro } \lambda \neq 0, \\ \ln(Y_t) & \text{pro } \lambda = 0. \end{cases}$$

Pokud hodnoty náhodné veličiny nejsou kladné, můžeme použít jednu z následujících transformací:

Box – Coxova mocninná transformace s posunutím

$$Z_t = \begin{cases} \dfrac{(Y_t + a)^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{pro } \lambda \neq 0, \\ \ln(Y_t + a) & \text{pro } \lambda = 0, \end{cases}$$

kde a je takové reálné číslo, aby všechny realizace byly kladné,

příp. mocninná transformace se znaménky

$$Z_t = \begin{cases} \text{sgn}(Y_t) \dfrac{|Y_t|^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{pro } \lambda \neq 0, \\ \text{sgn}(Y_t) \ln(Y_t) & \text{pro } \lambda = 0. \end{cases}$$

Poznamenejme ale, že při nesplnění podmínky $Y_t > 0$ nebo když pozorované hodnoty jsou blízké nule, je možno řadu transformovat posunutím pouze s vědomím značného rizika znehodnocení původní řady a znevěrohodnění výsledného modelování. Navíc mocninná transformace není spojitá pro $\lambda \to 0$, proto je třeba se vyhýbat malým nenulovým hodnotám parametru λ.

Odhad transformačního parametru mocninné transformace se pak provede pomocí maxima logaritmu věrohodnostní funkce

$$l^*(\lambda) = -\frac{n}{2}\ln\left(s^2(\lambda)\right) + (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i \text{ , kde } s^2 = \hat{\sigma}^2,$$

$$z_i = \begin{cases} \dfrac{y_i^{\lambda} - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0, \\ \ln(y_i) & \lambda = 0, \end{cases}$$

pro ekvidistantní hodnoty $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$ (pro dostatečně velké m) z vhodně zvoleného intervalu $\left(\lambda_1^*, \lambda_2^*\right)$, kde $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbf{R}$, a $\lambda_1^* < \lambda_2^*$, vypočítá hodnoty $l^*(\lambda)$ a hledá argument $\hat{\lambda}$ maxima těchto hodnot. Bylo odvozeno asymptotické rozdělení statistiky

$$K = -2\left[l^*(\lambda) - l^*\left(\hat{\lambda}\right)\right] \sim \chi^2(1)$$

a lze takto zkonstruovat jednostranný asymptotický interval spolehlivosti pro parametr λ

$$1 - \alpha = P\left(K < \chi^2_{1-\alpha}(1)\right) = P\left(-2\left[l^*(\lambda) - l^*\left(\hat{\lambda}\right)\right] < \chi^2_{1-\alpha}(1)\right) = P\left(l^*\left(\hat{\lambda}\right) - \tfrac{1}{2}\chi^2_{1-\alpha}(1) \le l^*(\lambda)\right),$$

tj. všechna λ splňující nerovnost

$$l^*(\lambda) \ge D_\alpha = l^*\left(\hat{\lambda}\right) - \tfrac{1}{2}\chi^2_{1-\alpha}(1)$$

leží v intervalu spolehlivosti a jsou tedy přijatelná.

Testování hypotéz: testujeme $H_0 : \lambda = \lambda_0$ proti alternativě $H_1 : \lambda > \lambda_0$. Nejdříve budeme testovat $H_0^1 : \lambda = 1$. Pokud H_0^1 nezamítneme, tj. $l^*(1) \ge D_\alpha$, nemusíme data transformovat. Pokud předchozí hypotézu zamítneme, můžeme testovat další $H_0^2 : \lambda = 0$. Pokud H_0^2 nezamítneme, tj. $l^*(0) \ge D_\alpha \ \wedge \ l^*(1) < D_\alpha$, transformace bude ve tvaru $z_i = \ln y_i$. Pokud však bude $l^*(0) < D_\alpha \ \wedge \ l^*(1) < D_\alpha$, provedeme transformaci $z_i = \left(y_i^{\hat{\lambda}} - 1\right)\Big/\hat{\lambda}$.

Algoritmus pro řešení praktických úloh:

1. Zkontrolujeme vstupní data, aby byla nezáporná, jinak příp. přičteme kladnou konstantu.
2. Vektor dat rozložíme na krátké úseky o délce 4 až 12 údajů.
3. V každém úseku provedeme robustní odhady střední hodnoty $\hat{\mu}_i$ (průměr, medián) a rozptylu $\hat{\sigma}_i^2$ (max-min, mezikvartilové rozpětí).
4. Předpokládáme, že platí $\sigma(\mu) = \sigma\mu^{\Theta}$, logaritmováním dostaneme $\ln\sigma(\mu) = \ln\sigma + \Theta\ln\mu$ a neznámé Θ odhadneme metodou nejmenších čtverců díky hodnotám $v_i = \ln\hat{\sigma}_i$, $u_i = \ln\hat{\mu}_i$ v regresním modelu $v_i = a + \Theta u_i + \varepsilon_i$, kde $a = \ln\sigma$, $\varepsilon_i \sim WN\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$.
5. Pro odhad $\hat{\Theta} = 1 - \hat{\lambda}$ pomocí t-statistiky zkonstruujeme interval spolehlivosti $I\left(\hat{\Theta}\right)$. Pokud tento interval bude obsahovat nulu, tj. $0 \in I\left(\hat{\Theta}\right)$, data se nebudou transformovat. Pokud $0 \notin I\left(\hat{\Theta}\right) \ \wedge \ 1 \in I\left(\hat{\Theta}\right)$, volí se transformace $z_i = \ln y_i$. Jinak se volí $z_i = \left(y_i^{\hat{\lambda}} - 1\right)\Big/\hat{\lambda}$.

3 Procesy s proměnlivými režimy

Jiným východiskem při řešení tohoto problému je přistoupení k modelování procesů s proměnlivými režimy – modely TAR (Threshold Autoregressive), modely MSW (Markov Switching), případně modely ARCH/GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).

Empiricky bylo zjištěno, že vysokofrekvenční časové řady se vyznačují v čase proměnlivou variabilitou, hovoří se o měnlivé volatilitě. To vede k vážným problémům při použití klasických lineárních (S)AR(I)MA modelů (Box – Jenkinsova metodologie). Bylo zjištěno, že s variabilitou může souviset úroveň a síla autokorelace v časových řadách. Charakteristické rysy takovýchto analyzovaných časových řad tedy nemohou být plně zachyceny jen lineárními modely, předpokládající pouze jeden typ závislosti – korelační závislost. Nelineární modely vycházejí z nějaké nelineární funkce řady stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin, takže předpokládají obecnější formu závislosti než pouze korelační. Změnu volatility (tedy i autokorelace) časové řady lze chápat jako změnu v režimu chování časové řady, která může být způsobena různými faktory – deterministickými i nesystematickými a nepredikovatelnými.

V 80.letech 20.stol. (Engle) vznikla koncepce modelování volatility časových řad (modely typu ARCH), která byla postupně rozpracována a byla navržena řada dalších modelů volatility. Svůj původ mají tyto modely v ekonometrii, postupně se začínají uplatňovat i v technometrii.

Modely ARCH pracují s podmíněnou střední hodnotu a podmíněným rozptylem. Mějme např. stacionární autoregresní model prvního řádu AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

kde $|\phi| < 1$, $\varepsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, který lze vyjádřit ve formě

$$X_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \ldots .$$

Nepodmíněná střední hodnota veličiny X_t je nulová, tedy $E\left(X_t\right) = 0$. Podmíněná střední hodnota E_{t-1} je střední hodnota veličiny X_t za předpokladu, že náhodné veličiny nabyly v časech $t-1,\ t-2,\ldots$ konkrétních hodnot. Závisí na volbě podmínky, je její funkcí – tuto funkci označujeme jako funkci regresní. Pro proces AR(1) je podmínkou určitá hodnota náhodné veličiny v čase $t-1$,

$$E_{t-1}\left(X_t\right) = \phi X_{t-1},$$

tj. podmíněná střední hodnota veličiny X_t je závislá na čase. Podmíněnou střední hodnotu lze vyjádřit obecným $\mathrm{ARMAX}\left(p,q,n\right)$ modelem

$$X_t = C + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{t,k} ,$$

kde $A_{t,k}$ je regresní matice.

Nepodmíněný rozptyl veličiny X_t pro proces AR(1) je

$$D_t\left(X_t\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2},$$

je tedy neměnný v čase. Podmíněný rozptyl se označuje jako funkce skedastická, jejíž průběh tak charakterizuje měnivost rozptylu veličiny X_t v závislosti na hodnotách veličin $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$. Podmíněný rozptyl veličiny X_t je $D_{t-1}\left(X_t\right) = \sigma_\varepsilon^2$, je tedy také neměnný v čase (je funkcí homoskedastickou).

Uvedené vlastnosti jsou charakteristické pro všechny stacionární a invertibilní procesy, tj. pro procesy typu AR, MA a ARMA.

Podívejme se nyní na nestacionární procesy, konkrétně integrované procesy. Uvažujme proces náhodné procházky

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde $\varepsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, který lze vyjádřit ve tvaru $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + \ldots$, takže nepodmíněná střední hodnota je nulová, tj. $E\left(X_t\right) = 0$. Podmíněná střední hodnota $E_{t-1}\left(X_t\right) = X_{t-1}$ je závislá na čase. Nepodmíněný rozptyl $D_t\left(X_t\right) = t\sigma_\varepsilon^2$ je lineární funkcí časové proměnné. Podmíněný rozptyl $D_{t-1}\left(X_t\right) = \sigma_\varepsilon^2$ je opět funkcí homoskedastickou.

Tyto vlastnosti jsou charakteristické pro všechny typy integrovaných procesů, tj. pro třídu modelů ARIMA. S uvedenými typy modelů se pracuje velmi dobře, neboť je lze jednoduše transformovat na gaussovský proces bílého šumu. Problematika bodových a intervalových odhadů parametrů tohoto procesu je ve statistické teorii dobře rozpracována.

Prakticky se při identifikaci modelu časové řady postupuje následovně: vybere se nějaký model, nejčastěji podle tvaru ACF a PACF, odhadnou se jeho parametry. Ve druhé fázi se provádí diagnostická kontrola modelu, ve které se ověřuje, zda příslušná transformace analyzovaného procesu vede k procesu gaussovského bílého šumu. Na základě odhadů parametrů se vypočítají residua a jejich prostřednictvím se testuje autokorelace, heteroskedasticita a normalita nesystematické složky modelu.

V případě většiny empirických teplárenských denních časových řad se vyskytuje situace, kdy nejsou splněny podmínky, za kterých lze použít lineární modely typu ARMA či ARIMA – není splněna především podmínka homoskedasticity a normality. Pokud provedeme grafické znázornění rozdělení hodnot časové řady, zjistíme, že má tzv. leptokurtické rozdělení pravděpodobnosti – takové rozdělení je špičatější a má „tlustší (delší) konce“ (Fat Tails) ve srovnání s rozdělením normálním. Existují dvě koncepce řešení problému nesplnění podmínek lineárního modelu třídy AR(I)MA.

První koncepce (Engle, 1984) vychází z představy, že problém je v typu modelu časové řady. Tato představa je založena na myšlence, že podíváme-li se na analyzovanou časovou řadu, všimneme si, že se její variabilita stejně jako úroveň v čase mění. Uvažované lineární modely jsou totiž založeny na podmínce, že se sice podmíněná střední hodnota v čase mění, ale podmíněný rozptyl je konstantní, což však mnohdy neodpovídá realitě. Je tedy vhodné navrhnout modely, které by splňovaly předpoklad v čase se měnícího podmíněného rozptylu (příp. podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu). Podstatné je, že tato koncepce nemění původní požadavek normality.

Druhá koncepce vychází z představy (Mandelbrot, 60.léta), že problém není v modelu časové řady, ale v požadavku normality rozdělení, který není reálný. Většina denních časových řad je charakteristická rozdělením, které je špičatější a má tlustší konce než rozdělení normální. Tato druhá koncepce má fundamentální charakter a její další rozpracování by znamenalo revoluční zásah do celé oblasti statistického modelování.

4 Modely volatility

Uvažujme stochastický proces $\left\{\varepsilon_t\right\}$, u kterého předpokládáme nulovou podmíněnou střední hodnotu

$$E\left(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}\right) = E_{t-1}\left(\varepsilon_t\right) = 0$$

a podmíněný rozptyl

$$D\left(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}\right) = D_{t-1}\left(\varepsilon_t\right) = E_{t-1}\left\{\varepsilon_t - E_{t-1}\left(\varepsilon_t\right)\right\}^2 = E_{t-1}\left(\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}\right) = \sigma_t^2,$$

přičemž Ω_{t-1} je relevantní minulá informace až do času $t-1$. Tyto požadavky splňuje model procesu $\left\{\varepsilon_t\right\}$ ve tvaru

$$\varepsilon_t = e_t \sigma_t ,$$

kde $E_{t-1}(e_t) = 0$, $D_{t-1}(e_t) = 1$, $E(e_t e_{t-i}) = 0$ pro $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (nezávislé veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem). Je-li rozdělení náhodné veličiny e_t za podmínky informace, která je k dispozici v čase $t-1$, normované normální, tj. $e_t \sim N_{t-1}(0,1)$, potom je rozdělení náhodné veličiny ε_t za podmínky informace, která je k dispozici v čase $t-1$, rovněž normální, avšak s podmíněným rozptylem, který se mění v závislosti na čase, tj. $\varepsilon_t \sim N_{t-1}(0, \sigma_t)$. Dále platí

$$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} \geq E(e_t^4),$$

tj. špičatost nepodmíněného rozdělení ε_t je větší nebo rovna špičatosti normovaného normálního rozdělení, přičemž rovnost nastane tehdy, jsou-li podmíněné rozptyly konstantní. Jednotlivé modely volatility spočívají ve formulaci vývoje podmíněného rozptylu σ_t^2 v čase.

Lineární modely volatility jsou charakteristické tím, že podmíněný rozptyl je lineární funkcí veličin $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \ldots, \varepsilon_{t-p}^2$. Nelineární modely jsou schopné postihnout různé asymetrické jevy, např. pákový efekt, kdy se kladné a záporné šoky do podmíněného rozptylu nepromítají symetricky, jak to předpokládají lineární modely volatility. Základními lineárními modely volatility jsou ARCH(q) a GARCH(p,q) modely.

Proces ARCH(q)

Podmíněný rozptyl je

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 ,$$

kde $\omega > 0$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \geq 0$. Toto lze zapsat i pomocí operátoru zpětného posunutí B, pro který je $B^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}$, pak

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \ldots + \alpha_q B^q) \varepsilon_t^2 .$$

Model ARCH(q) lze vyjádřit v autoregresním tvaru modelu AR(q) procesu $\{\varepsilon_t^2\}$

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \nu_t ,$$

kde $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Proces ARCH($q$) je slabě stacionární, leží-li kořeny polynomiální rovnice $(\alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \ldots + \alpha_q B^q) = 0$ vně jednotkového kruhu. Nepodmíněný rozptyl procesu je

$$D(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i} ,$$

tedy je konstantní v čase a proces $\{\varepsilon_t\}$ je nepodmíněně homoskedastický.

Zejména pak model ARCH(1) má tvar podmíněného rozptylu

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 .$$

Úpravou lze získat autoregresní tvar modelu

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t ,$$

kde $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 \left(e_t^2 - 1 \right)$. Jestliže $\alpha_1 = 0$, pak je $\{\varepsilon_t\}$ proces gaussovského bílého šumu (za podmínky normality). Je-li α_1 příliš vysoké, je rozptyl procesu ARCH(1) nekonečně velký. Proces je slabě stacionární, jestliže $\alpha_1 < 1$. Nepodmíněná střední hodnota, resp. nepodmíněný rozptyl jsou

$$E(\varepsilon_t) = 0 \text{, resp. } D(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1-\alpha_1} .$$

Podmíněný rozptyl je kladný pro $\omega > 0$ a $\alpha_1 \geq 0$. Čtvrtý moment je konečný pro $3\alpha_1^2 < 1$, tehdy proces generuje data, která mají rozdělení špičatější a jeho konce jsou „tlustší“ v porovnání s rozdělením normálním,

$$K_\varepsilon = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} .$$

Model ARCH je charakteristický tím, že lze pomocí něj zachytit shluky volatility v časové řadě. To plyne z toho, že jestliže je ε_{t-1} v absolutní hodnotě vysoké, lze očekávat i ε_t v absolutní hodnotě vysoké. Vysoké (příp. nízké) hodnoty časové řady budou následovány vysokými (příp. nízkými) hodnotami jakéhokoliv znaménka.

Proces GARCH(*p*,*q*)

Má podmíněný rozptyl ve tvaru

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \ldots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 ,$$

kde $p \geq 0$, $q > 0$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pro $i = 1, \ldots, q$, $\beta_j \geq 0$ pro $j = 1, \ldots, p$. Pomocí operátoru zpětného posunutí jej lze vyjádřit ve tvaru

$$\sigma_t^2 = \omega \left(\alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \ldots + \alpha_q B^q \right) \varepsilon_t^2 + \left(\beta_1 B + \beta_2 B^2 + \ldots + \beta_p B^p \right) \sigma_t^2 =$$

$$= \omega + \alpha_q (B) \varepsilon_t^2 + \beta_p (B) \sigma_t^2 .$$

Model GARCH(*p*,*q*) je tak možné psát ve tvaru

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-1}^2 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i \nu_{t-i} + \nu_t$$

nebo pomocí operátoru zpětného posunutí

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \left[\alpha(B) + \beta(B) \right] \varepsilon_t^2 + \nu_t - \beta(B) \nu_t ,$$

kde $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Jedná se tedy o model ARMA(*m*,*q*) pro ε_t^2, kde $m = \max\{p, q\}$. Jestliže je $p = 0$, model se transformuje na ARCH(*q*). Je-li $p = 0 = q$, pak je $\{\varepsilon_t\}$ proces gaussovského bílého šumu. Model GARCH(*p*,*q*) lze vyjádřit jako ARCH(∞), tedy model ARCH s mnoha zpožděními lze aproximovat modelem GARCH s méně zpožděními, resp. s menším počtem parametrů. Model GARCH(*p*,*q*) je slabě stacionární, jestliže $\alpha_p(1) + \beta_q(1) < 1$. Nepodmíněný rozptyl procesu je

$$D(X_t) = E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_p(1) - \beta_q(1)} .$$

Zejména pak podmíněný rozptyl procesu GARCH(1,1) má tvar

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1},$$

kde $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$. Pomocí operátoru zpětného posunutí píšeme

$$(1 - \beta_1 B)\sigma_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2.$$

Úpravou jej můžeme přepsat do tvaru modelu ARMA(1,1)

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta_1 \nu_{t-1},$$

kde $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Proces je slabě stacionární pro $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Nepodmíněný rozptyl procesu je

$$D(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1},$$

tedy je konstantní v čase a proces $\{\varepsilon_t\}$ je nepodmíněně homoskedastický. Proces GARCH(1,1) stejně jako procesy ARCH generují řady hodnot, které mají rozdělení špičatější a s „tlustšími konci“ v porovnání s normálním rozdělením. Špičatost rozdělení náhodných veličin ε_t má pro $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ tvar

$$K = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{3\left[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\right]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2},$$

jinak je ∞. Autokorelační funkce procesu $\{\varepsilon_t^2\}$ je

$$\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2 \beta_1}{1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2},\ \rho_k = \rho_1 (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \text{ pro } k = 2, 3, \ldots.$$

Hodnoty autokorelační funkce s rostoucím zpožděním k exponenciálně klesají, rychlost poklesu závisí na velikosti součtu $\alpha_1 + \beta_1$. Blíží-li se tento součet hodnotě jedna, je pokles autokorelační funkce velmi pozvolný. Hodnoty parciální autokorelační funkce rovněž s rostoucím zpožděním exponenciálně klesají. Obecně lze tvrdit, že tvar ACF a PACF procesu $\{\varepsilon_t^2\}$ odpovídá tvaru těchto funkcí modelu ARMA(*p*,*q*).

Proces GARCH(1,1) je z praktického hlediska zajímavý tím, že jím lze aproximovat proces ARCH s mnoha zpožděními.

Dalšími lineární modely jsou IGARCH, FIGARCH, GARCH-M, nelineární modely jsou pak EGARCH, IEGARCH, FIEGARCH, GJR-GARCH, QGARCH, SV model aj.

Proces výstavby modelů volatility lze rozdělit do následujících kroků:

a) Určení vhodného lineárního nebo nelineárního úrovňového modelu pro danou časovou řadu.

b) Testování nulové hypotézy podmíněné homoskedasticity proti alternativní hypotéze podmíněné heteroskedasticity lineárního nebo nelineárního typu.

c) Odhadování parametrů zvoleného lineárního nebo nelineárního modelu podmíněné heteroskedasticity.

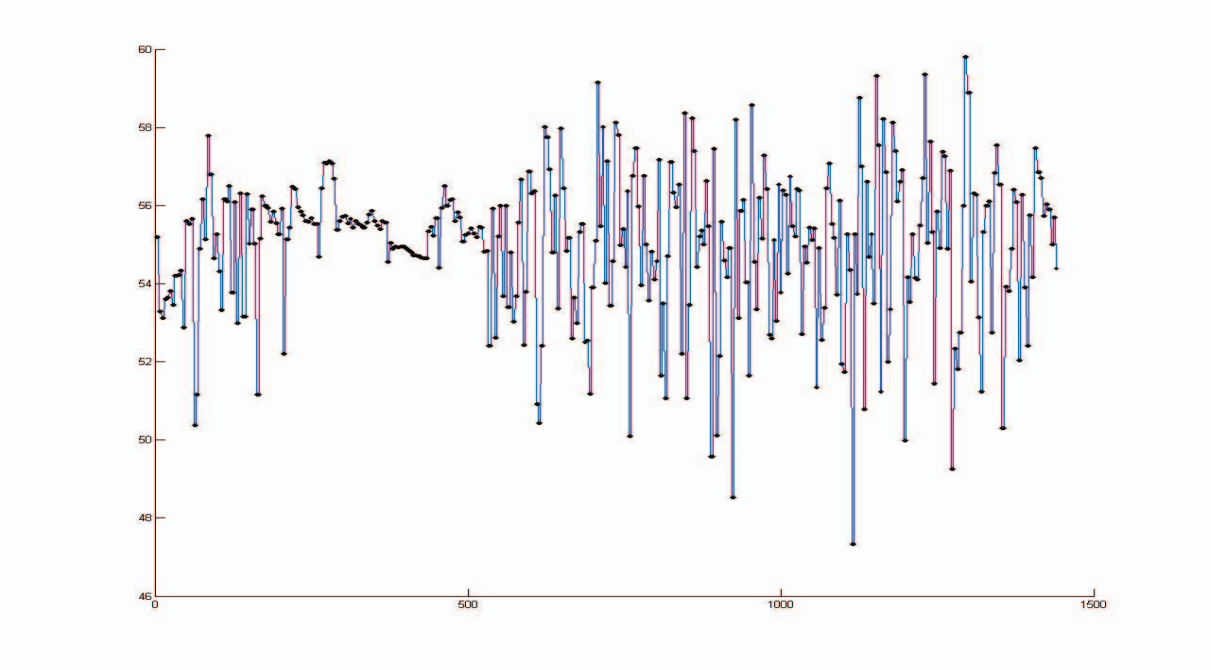
d) Ověření vhodnosti daného modelu diagnostickými testy.

e) Modifikace modelu, je-li to třeba.

f) Užití modelu pro popisné nebo predikční účely.

5 Analýza provozních teplárenských dat

Stručně naznačíme průběh stochastické analýzy získaných reálných provozních teplárenských dat. Na následujícím obrázku je graficky znázorněn časový průběhu hodnot teplot výstupní vody na výstupu z výměníkové stanice (Teplo Přerov, a.s., Palackého ulice) během jednoho dne (leden, 2007).

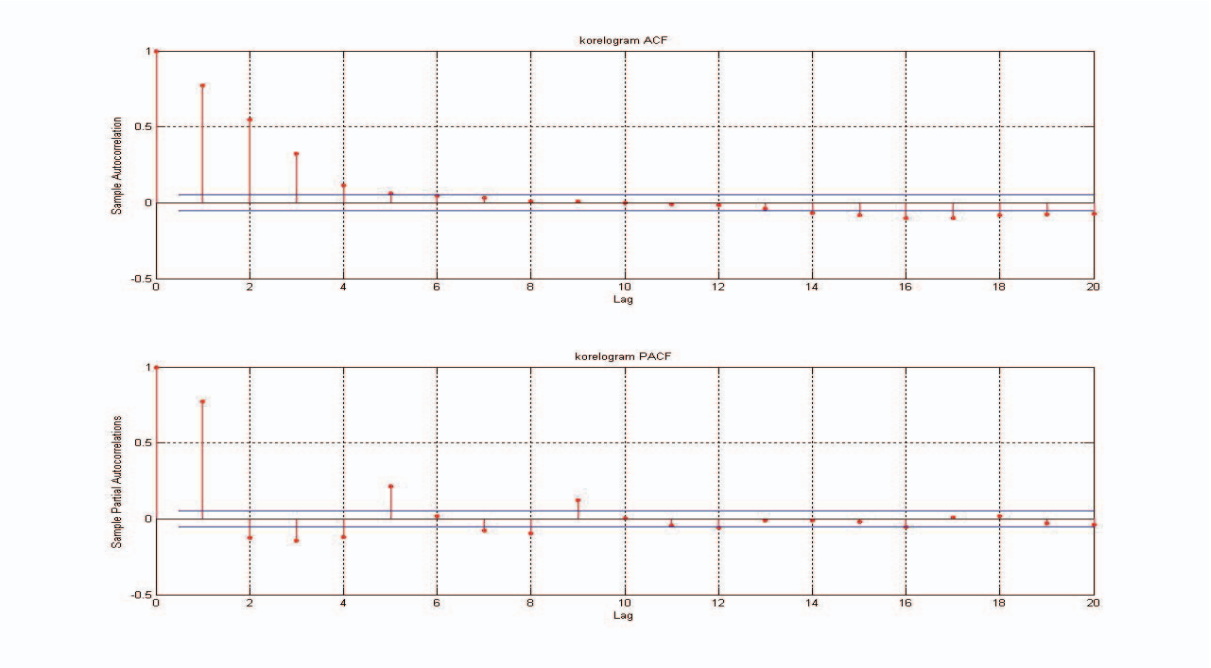


Obr.1: Časový průběhu hodnot teplot výstupní vody na výstupu z výměníkové stanice

Pro vektor dat (označíme jej A) vytvoříme matlabovský skript `BJmodel.m`, který provede identifikaci Box – Jenkinsova modelu. Konkrétně z daného vektoru dat spočítá výběrový průměr, výběrový rozptyl, zobrazí korelogramy ACF a PACF, zobrazí periodogram a spočítá matici tvořenou hodnotami FPE kriteria pro jednotlivé ARMA modely – prvek s minimální hodnotou na pozici $[i, j]$ indikuje model $\mathrm{ARMA}(i-1, j-1)$ (indexuje se od nuly). Dostáváme

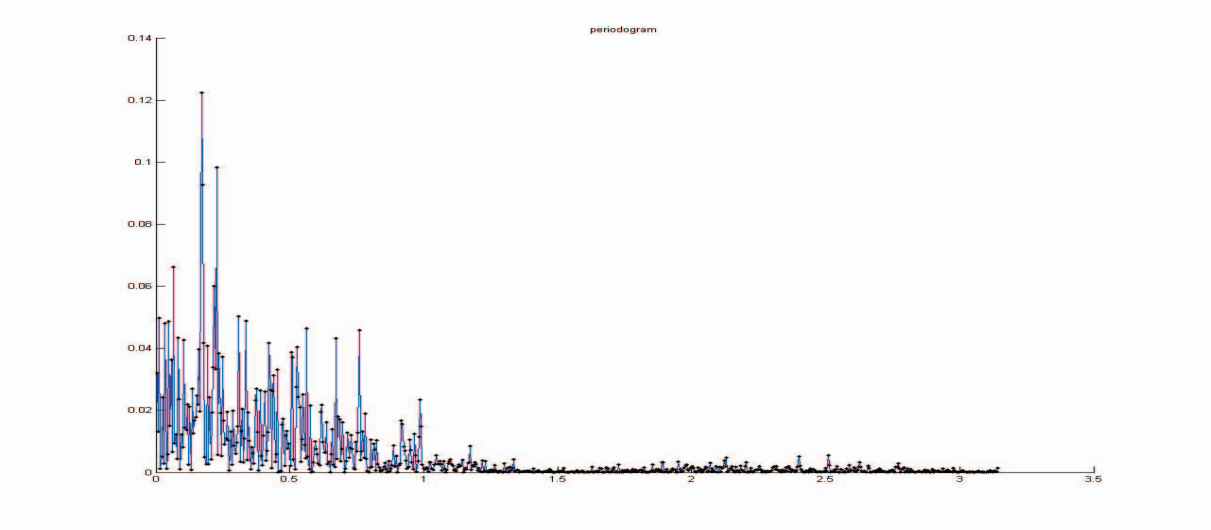
```
>> BJmodel(A)
vyberovy prumer:  55.0193
vyberovy rozptyl:  3.60564
hodnoty FPE kriteria pro jednotlive ARMA modely:
1.0e+003 *
    3.030731706022    0.909115365313    0.324244052345    0.166364044939
    0.001631776099    0.001634188044    0.001636436964    0.001638666986
    0.001634048368    0.001636455241    0.001638704943    0.001637861626
    0.001637473969    0.001639879685    0.001641482159    0.001642407768
```

Z této matice se jako nejvhodnější jeví model ARMA(1,0), neboť prvek na pozici (2,1) má nejmenší hodnotu. Korelogramy na následujícím obrázku také naznačuje, že by se mohlo jednat o proces ARMA(1,0).



Obr.2: Korelogramy ACF a PACF

Periodogram na následujícím obrázku neindikuje existenci nějakých význačných frekvencí.



Obr.3: Periodogram

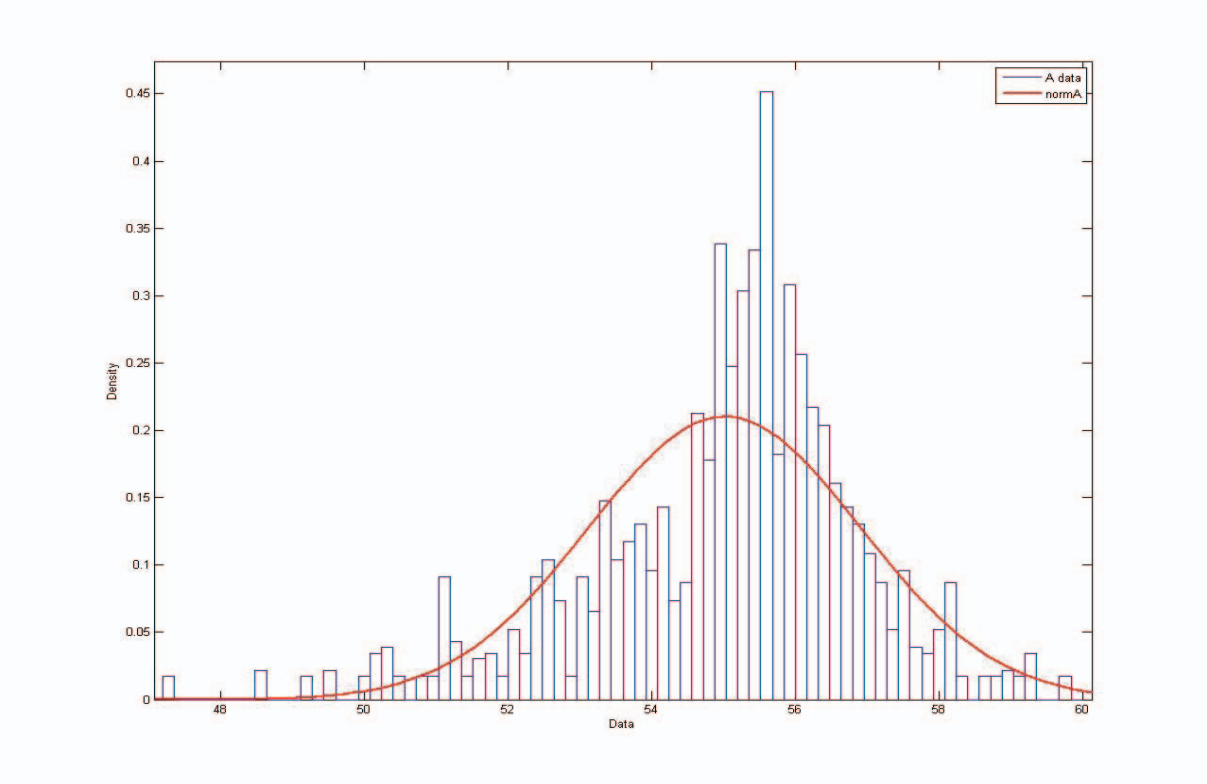
Vytvoříme matlabovský skript `ARMAmodel.m`, který může pomoci v ověření správnosti volby modelu ARMA(1,0). Je založen na ověřování nekorelace residuí pomocí Portmonteau testu, přičemž by mělo platit, že hodnota Portmonteau statistiky Q by měla být menší než kritická hodnota testu. Navíc spočítá hodnoty střední residuální chyby, střední kvadratické chyby a střední absolutní chyby. Dostáváme tak:

```
>> ARMAmodel(A,1,0)
Discrete-time IDPOLY model: A(q)y(t) = e(t)
A(q) = 1 - 0.9731 (+-0.01949) q^-1
Estimated using ARMAX from data set yc
Loss function 1.58739 and FPE 1.5896
Sampling interval: 1


hodnota Portmonteau statistiky:  Q = 251.591
```

```
kriticka hodnota :  krit = 52.1923
prumerna rezidualni chyba:  ME = -0.000543812
prum. kvadraticka chyba:  MSE = 1.58627
prum. absolutni chyba:  MAE = 0.457015
```

Vidíme, že hodnota Portmonteau statistiky $Q = 251.591$ je podstatně vyšší než kritická hodnota testu $k = 52.1923$. Sestavíme histogram naměřených dat a porovnáme jej s normálním rozdělením.



Obr.4: Histogram naměřených dat

Vidíme, že se zřejmě jedná o data pocházející z leptokurtického rozdělení, tedy špičatější rozdělení s „tlustějšími“ konci oproti rozdělení normálnímu.

Test normality: matlabovský `jbtest` provede Jarque – Berův test nulové hypotézy, že data pocházejí z normálního rozdělení s neznámou střední hodnotou a neznámým rozptylem, proti alternativě, že data nepocházejí z normálního rozdělení. Test je založen na myšlence současného testování šikmosti a špičatosti. Kromě nenormality může k zamítnutí nulové hypotézy vést i fakt, že hodnoty nejsou homoskedastické. Testovací statistika má tvar

$$JB = \frac{n}{6}\left(s^2 + \frac{(k-3)^2}{4} \right),$$

kde n je počet dat ve vzorku, s, resp. k je výběrová šikmost, resp. špičatost. Za platnosti nulové hypotézy má χ^2 rozdělení se dvěma stupni volnosti.

```
>> [h,p,jbstat,krit] = jbtest(A, 0.05);
>> [h,p,jbstat,krit]
ans =
    1.00000000000      0.00100000000     227.04309899435     5.94951665714
```

Tedy nulovou hypotézu na 5%-ní hladině významnosti zamítáme, data nepocházejí z normálního rozdělení.

Vytvoříme matlabovký skript `testnezprvku.m` (test nezávislosti prvků výběru) a provedeme pomocí něj test autokorelace. Tento skript provádí test časové závislosti prvků výběru, případně závislost související s pořadím jednotlivých měření, pomocí koeficientu autokorelace prvního řádu. Nulová hypotéza tvrdí, že není přítomna autokorelace. Test rozhodne o jejím zamítnutí či nezamítnutí na zvolené hladině významnosti. Navíc určí hodnotu testovací statistiky a rozpětí kritického oboru. Aplikujeme-li jej na naši časovou řadu A, výsledkem je:

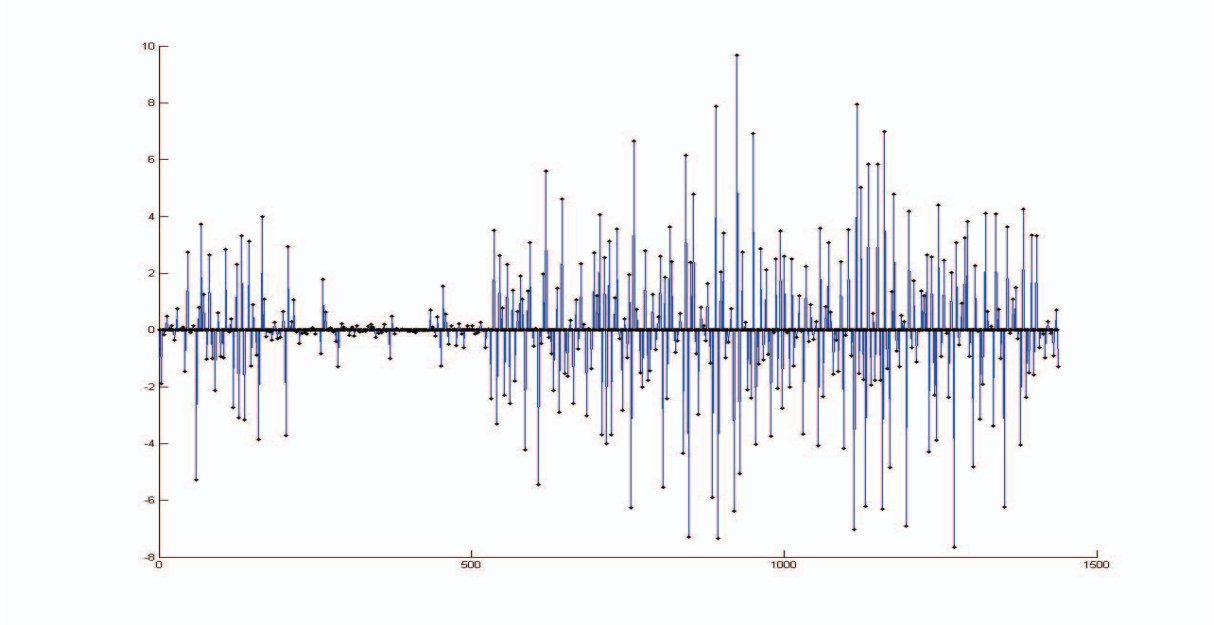
```
>> testnezprvku(A)
*** H0: neni autokorelace ***
H0 zamitame - existuje autokorelace
testovaci statistika:  61.8415
hranice kritickeho oboru:
    -1.961611612000120   1.961611612000120
```

Tedy na 5%-ní hladině významnosti nulovou hypotézu zamítáme, v datech existuje autokorelace.

Provedeme diferencování časové řady a pracujeme dále s řadou prvních diferencí A1

```
>> A1=diff(A);
```

Průběh prvních diferencí je na následujícím obrázku, ze kterého jsou jasně patrné shluky volatility.



Obr.5: První diference

Pomocí matlabovské procedury `archtest` provedeme Engelův ARCH-test, který zjišťuje přítomnost podmíněné heteroskedasticity (tedy ARCH efektu). Nulová hypotéza tvrdí, že časová řada residuí sestává z nezávislého identicky rozděleného gaussovského šumu $IID\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$, tedy že neexistuje ARCH efekt. Konstruuje se regresní model

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \omega + \alpha_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2\hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t,$$

na jehož základě se získá index determinace R^2. Testové kriterium ve tvaru TR^2, kde T je počet dat, má za předpokladu platnosti nulové hypotézy asymptoticky rozdělení $\chi^2\left(q\right)$.

```
>> [H,p,stat,krit] = archtest(A1-mean(A1), [1 2 3 4 5 10 15 20]', 0.05);
>> [H,p,stat,krit]
ans =
1.000000000000    0.0257413771745   4.97330754969816    3.8414588206942
```

```
1.000000000000    0.0050510169332   10.5763313661064    5.9914645471080
1.000000000000    0.0101482495566   11.3130222684653    7.8147279032512
1.000000000000    0                 139.055709112265    9.4877290367812
1.000000000000    0                 152.312778733859    11.070497693516
1.000000000000    0                 155.153360928627    18.307038053275
1.000000000000    0                 159.156255103441    24.995790139728
1.000000000000    0                 161.922848731419    31.410432844230
```

Tedy na 5%-ní hladině významnosti zamítáme nulovou hypotézu, pro $q = 1,2,3,4,5,10,15$ i 20 je v modelu přítomna podmíněná heteroskedasticita.

GARCH modelování

Matlabovský test pomocí věrohodnostního poměru `lratiotest` pomůže odhalit parametry modelu GARCH(p,q).

```
>> spec11 = garchset('P',1,'Q',1,'Display','off');
>> spec21 = garchset('P',2,'Q',1,'Display','off');
>> spec12 = garchset('P',1,'Q',2,'Display','off');
>> spec22 = garchset('P',2,'Q',2,'Display','off');

>> [coeff11,errors11,LLF11] = garchfit(spec11,A1);
>> [coeff12,errors12,LLF12] = garchfit(spec12,A1);
>> [coeff21,errors21,LLF21] = garchfit(spec21,A1);
>> [coeff22,errors22,LLF22] = garchfit(spec22,A1);
```

Postupně provedeme několik testů, z nichž je patrné, že model GARCH(1,2) má nejlepší výsledky.

```
>> [H,pValue,Stat,CriticalValue] = lratiotest(LLF21,LLF11,1,0.05);
>> [H,pValue,Stat,CriticalValue]
ans =
0   0.999722138415920   0.000000121276571   3.841458820694152

>> [H,pValue,Stat,CriticalValue] = lratiotest(LLF12,LLF11,1,0.05);
>> [H,pValue,Stat,CriticalValue]
ans =
1.00000000   0.000000000001612  49.907257904396829   3.841458820694152

>> [H,pValue,Stat,CriticalValue] = lratiotest(LLF12,LLF21,1,0.05);
>> [H,pValue,Stat,CriticalValue]
ans =
1.000000000  0.000000000001612  49.907257783120258   3.841458820694152

>> [H,pValue,Stat,CriticalValue] = lratiotest(LLF12,LLF22,1,0.05);
>> [H,pValue,Stat,CriticalValue]
ans =
0   1.000000000000000  -1.877927843629550   3.841458820694152
```

```
>> [H,pValue,Stat,CriticalValue] = lratiotest(LLF22,LLF12,1,0.05);
>> [H,pValue,Stat,CriticalValue]
ans =
0   0.170569848830138   1.877927843629550   3.841458820694152
```

Vytvoříme matlabovský skript `GARCHmodel.m` , který sestrojí matici hodnot AIC, resp. BIC kriteria pro rozhodování o řádu modelu GARCH – prvek s minimální hodnotou na pozici $[i, j]$ indikuje model $\mathrm{GARCH}(i, j)$. V našem případě dostaneme:

```
>> GARCHmodel(A1,2)
hodnoty AIC kriteria pro jednotlive GARCH modely:
1.0e+003 *
     4.220753025055129   4.172845767150732
     4.222753024933852   4.172967839307103
hodnoty BIC kriteria pro jednotlive GARCH modely:
1.0e+003 *
     4.241839839882679   4.199204285685170
     4.249111543468290   4.204598061548427
```

I odtud se jeví model GARCH(1,2) jako nejlepší volba. Připravíme si matlabovskou strukturu tohoto modelu.

```
>> spec = garchset('P', 1, 'Q', 2)
spec =
               Comment: 'Mean: ARMAX(0,0,?); Variance: GARCH(1,2) '
          Distribution: 'Gaussian'
                     C: []
         VarianceModel: 'GARCH'
                     P: 1
                     Q: 2
                     K: []
                GARCH: []
                 ARCH: []
```

Provedeme odhad parametrů užitím matlabovské procedury garchfit.

```
>> [coeff,errors,LLF,eFit,sFit] = garchfit(spec,A1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
     Diagnostic Information
Number of variables: 5

     Functions
     Objective:                    garchllfn
     Gradient:                     finite-differencing
```

Hessian: finite-differencing (or Quasi-Newton)

Nonlinear constraints: armanlc

Gradient of nonlinear constraints: finite-differencing

Constraints

Number of nonlinear inequality constraints: 0

Number of nonlinear equality constraints: 0

Number of linear inequality constraints: 1

Number of linear equality constraints: 0

Number of lower bound constraints: 5

Number of upper bound constraints: 5

Algorithm selected

medium-scale

%%

End diagnostic information

Iter	F-count	f(x)	max constraint	Line search steplength	Directional derivative	First-order optimality	Procedure
0	6	2334.52	-0.025				
1	19	2332.87	-0.0248	0.00781	266	448	
2	29	2332.13	-0.02325	0.0625	481	666	
3	41	2331.84	-0.02289	0.0156	143	420	
4	48	2287.97	-0.01145	0.5	-80.9	479	
5	54	2169.63	0	1	2.78e+003	3.04e+004	
6	64	2157.44	0	0.0625	257	7.15e+003	
7	72	2150.12	0	0.25	402	1.21e+004	
8	81	2132.51	0	0.125	54.6	4.3e+003	
9	87	2101.07	0	1	38.7	9.59e+003	
10	93	2091.36	0	1	1.39	5.14e+003	
11	99	2085.66	0	1	-4.74	3.23e+003	
12	106	2082.62	0	0.5	11.6	8.13e+003	
13	112	2082.12	0	1	2.8	3.76e+003	
14	118	2081.51	0	1	-0.0778	1.12e+003	
15	124	2081.44	0	1	0.107	641	
16	130	2081.42	0	1	0.00345	64.1	
17	136	2081.42	0	1	-1.34e-005	2.75	
18	142	2081.42	0	1	2.76e-009	0.0107	Hessian modified

Optimization terminated: magnitude of search direction less than 2*options.TolX

and maximum constraint violation is less than options.TolCon.

```
     Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-007):
       lower      upper     ineqlin   ineqnonlin
         4                     1

     Boundary Constraints Active: Standard Errors May Be Inaccurate.
```

```
>> garchdisp(coeff,errors)
     Mean: ARMAX(0,0,0); Variance: GARCH(1,2)

     Conditional Probability Distribution: Gaussian
     Number of Model Parameters Estimated: 5
```

Parameter	Value	Standard Error	T Statistic
C	-0.011966	0.01614	-0.7413
K	0.0015184	8.0975e-005	18.7519
GARCH(1)	0.96139	0.0012091	795.1219
ARCH(1)	0	0.010684	0.0000
ARCH(2)	0.03861	0.01047	3.6876

Dostáváme tak GARCH(1,2) model:

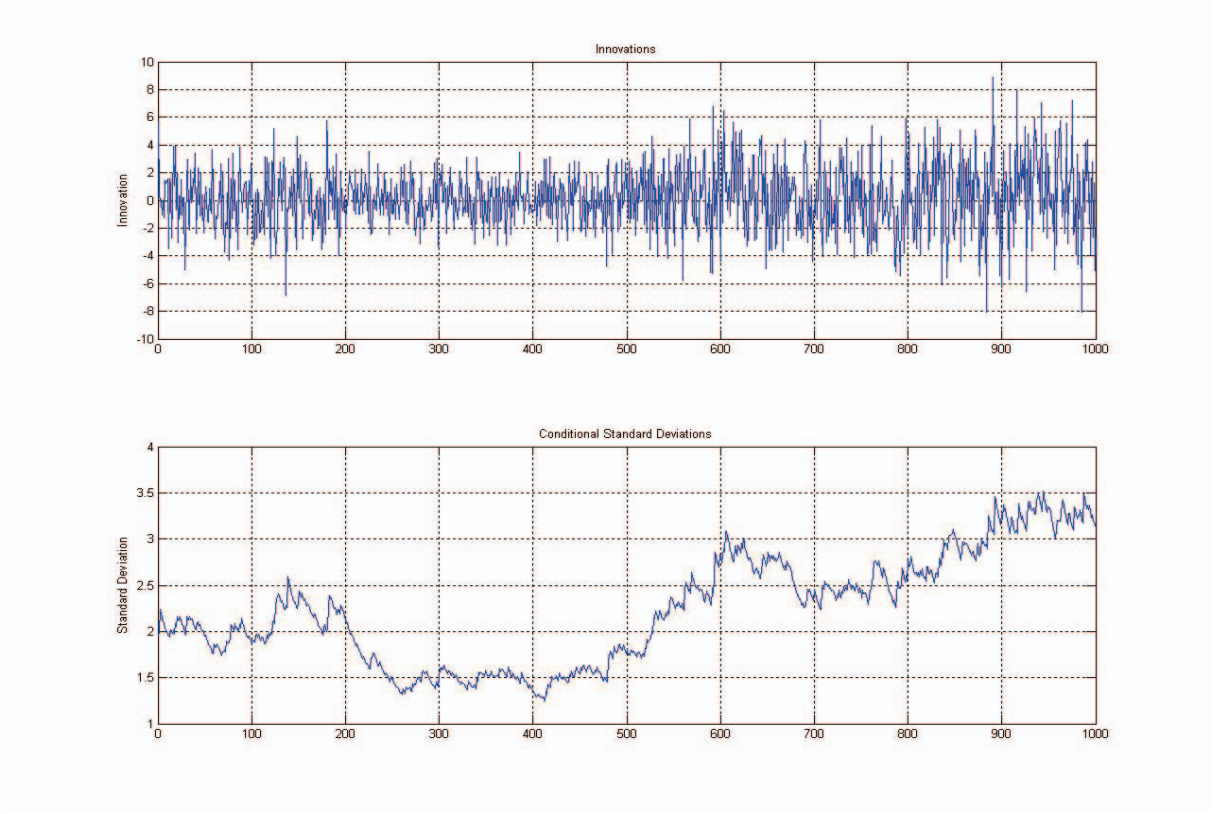
$$Y_t = -0.011966 + \varepsilon_t ,$$

$$\sigma_t^2 = 0.0015184 + 0.96139\sigma_{t-1}^2 + 0.03861\varepsilon_{t-2}^2 .$$

Provedeme simulaci dat daných výše uvedeným modelem:

```
>> [e,s] = garchsim(coeff,1000);
>> garchplot(e,s)
```

Průběhy residuí a podmíněné směrodatné odchylky simulovaného procesu jsou na následujícím obrázku.

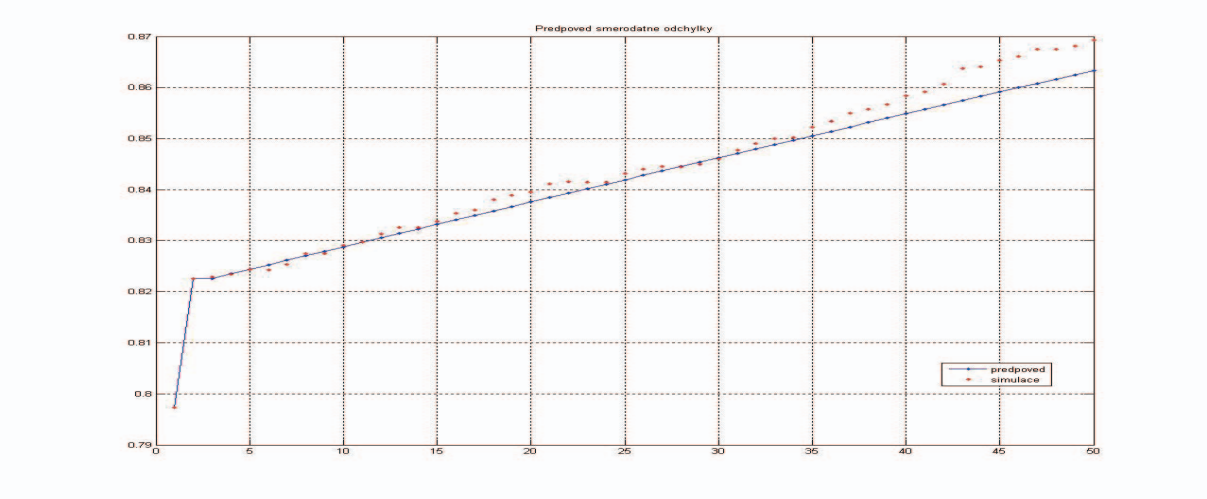


Obr.6: Residua a podmíněné směrodatné odchylky

Na závěr vytvoříme předpovědi (v horizontu 50 pozorování), které porovnáme s výsledky získané simulací našeho modelu.

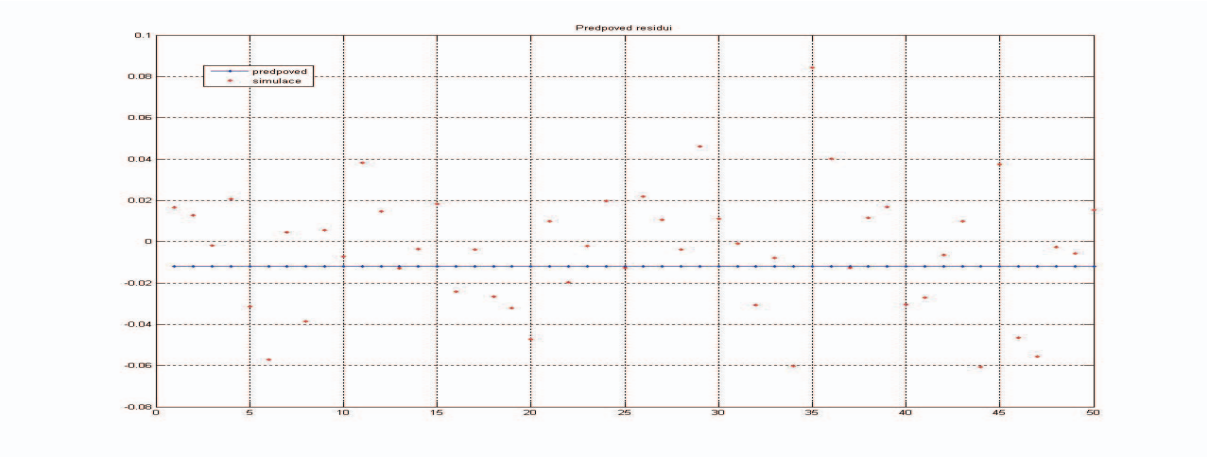
```
>> hor=50;
>>[sigmaForecast,meanForecast,sigmaTotal,meanRMSE]=garchpred(coeff,A1,hor);
>> nPaths=1000;
>> [eSim,sSim,ySim] = garchsim(coeff,hor,nPaths,0,[],[],eFit,sFit,A1(end));


>> figure
>> plot(sigmaForecast,'.-b')
>> hold('on')
>> grid('on')
>> plot(sqrt(mean(sSim.^2,2)),'.r')
>> title('Predpoved smerodatne odchylky')
>> legend('predpoved','simulace')
```



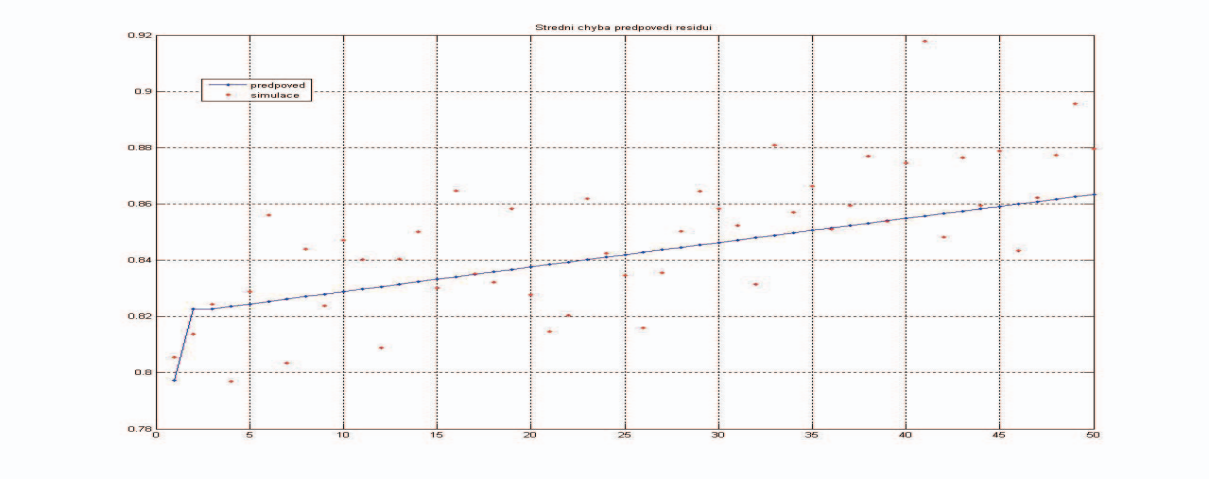
Obr.7: Předpoveď směrodatné odchylky

```
>> figure(2)
>> plot(meanForecast,'.-b')
>> hold('on')
>> grid('on')
>> plot(mean(ySim,2),'.r')
>> title('Predpoved residui')
>> legend('predpoved','simulace',4)
```



Obr.8: Předpověď residuí

```
>> figure(3)
>> plot(meanRMSE,'.-b')
>> hold('on')
>> grid('on')
>> plot(std(ySim'),'.r')
>> title('Stredni chyba predpovedi residui')
>> legend('predpoved','simulace')
```



Obr.9: Střední chyba předpovědi residuí

6 Závěr

Naše výsledky nejsou produktem ukončeného a uzavřeného projektu, jsou pouze jednou z částí běžícího úkolu modelování a predikce spotřeby tepelné energie. Modely GARCH jsou běžně používané a často aplikované v ekonometrii. Našim záměrem bylo demonstrovat užití těchto stochastických modelů v technometrii, přičemž samotná analýza probíhala v prostředí MATLABu.

Literatura

[1] Anděl, J.: *Matematická statistika*, SNTL/ALFA, Praha, 1978
[2] Anděl, J.: *Statistická analýza časových řad*, SNTL, Praha, 1976
[3] Arlt, J. – Arltová, M.: *Finanční časové řady*, Grada, Praha, 2003
[4] Arlt, J. – Arltová, M.: *Konstrukce předpovědí na základě modelů GARCH*, Acta oeconomica pragensia 10: (7), VŠE, Praha, 2002
[5] Arlt, J.: *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*, Grada, Praha, 1999
[6] Arlt, J. – Radkovský, Š.: *Význam modelování a předpovídání volatility časových řad pro řízení ekonomických procesů*, Politická ekonomie 48: (1), VŠE, Praha, 2000
[7] Budíková, M. – Lerch, T. – Mikoláš, Š.: *Základní statistické metody*, skriptum MU, Brno, 2005
[8] Cipra, T.: *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*, SNTL, Praha, 1986
[9] Forbelská, M.: *Stochastické modelování jednorozměrných časových řad*, skriptum MU, Brno, 2009
[10] Hebák, P. a kol.: *Vícerozměrné statistické metody 1, 2, 3*, Informatorium, Praha, 2005, 2007
[11] Likeš, J. – Machek, J.: *Matematická statistika*, MVŠT – sešit IV, SNTL, Praha, 1983
[12] Likeš, J. – Machek, J.: *Počet pravděpodobnosti*, MVŠT – sešit X, SNTL, Praha, 1981
[13] Meloun, M. – Militký, J.: *Statistická analýza experimentálních dat*, Academia, Praha, 2004
[14] Rao, R. C.: *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*, Academia, Praha, 1978

David KVAPIL
UNIS, a.s.
Jundrovská 33, 624 00 Brno, CZ
dkvapil@unis.cz