DVĚ METODY ŘEŠENÍ PROBLEMATIKY ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN

A. Mikš, J. Novák, P. Novák

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Katedra fyziky

Abstrakt

V práci jsou uvedeny dvě metody řešení šíření elektromagnetického pole prostorem a to pro pole skalární a pole vektorové. Nalezené obecné vztahy nám umožňují efektivně řešit řadu praktických úloh např. v oblasti interakce vlnového pole s materiálovým objektem, problematiku difrakce elektromagnetických vln a v dalších oblastech. Pro numerické řešení uvedené problematiky je velmi vhodné výpočetní prostředí MATLAB, které v sobě obsahuje všechny funkce a procedury potřebné při řešení konkrétních úloh z praxe.

1 Úvod

V práci jsou uvedeny dvě metody řešení šíření elektromagnetického pole prostorem a to pro pole skalární a pole vektorové. První metoda je založena na popisu elektromagnetického pole pomocí úhlového spektra rovinných vln. Výhodou této metody je možnost využít při numerickém řešení konkrétních problémů algoritmů pro rychlou Fourierovu transformaci. Druhá metoda využívá pro přímé řešení rovnic pole metody Greenovy funkce. Obě metody jsou aplikovány jak na skalární tak na vektorové pole. Nalezené obecné vztahy nám umožňují efektivně řešit řadu praktických úloh např. v oblasti interakce vlnového pole s materiálovým objektem, problematiku difrakce elektromagnetických vln a v dalších oblastech. Pro numerické řešení uvedené problematiky je velmi vhodné výpočetní prostředí MATLAB.

2 Skalární vlnové pole

Předpokládejme, že vlastnosti vlnového pole budou dostatečně přesně popsány jednou skalární funkcí, kterou může být např. složka vektoru elektrické nebo magnetické intenzity. Předpokládejme přitom, že ostatní složky mohou být nezávisle zkoumány stejným způsobem. Zcela tedy ignorujeme ten fakt, že jednotlivé složky vektorů elektromagnetického pole jsou vázány Maxwellovými rovnicemi [1-7] a nelze je proto zkoumat nezávisle. Experimenty v oblasti difrakce však ukazují, že skalární teorie dává obdivuhodně přesné výsledky jsou-li splněny následující podmínky:

1) charakteristické rozměry těles na kterých nastává difrakce jsou mnohonásobně větší než je vlnová délka záření
2) difrakční jevy jsou zkoumány v dostatečně velkých vzdálenostech od těles na kterých nastává difrakce.

Skutečnost, že pomocí skalární teorie dostáváme přesné výsledky má velký význam zejména v teorii optického zobrazení, kde pracujeme s přirozeným (nepolarizovaným) zářením a zajímá nás především jeho intenzita. Také experimenty v této oblasti jsou ve velmi dobrém souhlasu se skalární teorií difrakčního zobrazení.

Uvažujme nyní skalární vlnové pole, které je v libovolném bodě M prostoru a časovém okamžiku t popsáno skalární funkcí V(M,t). Jak je známo z teorie elektromagnetického pole splňuje funkce V(M,t) vlnovou rovnici

$$\nabla^2 V(M,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V(M,t)}{\partial t^2}, \tag{1}$$

kde v značí fázovou rychlost vlnění a ∇^2 Laplaceův operátor. Hledejme nyní řešení vlnové rovnice (1) ve tvaru

$$V(M,t) = U(M)\, e^{-i\omega t}\,, \tag{2}$$

kde $\omega = 2\pi\nu$ přičemž ν je frekvence záření. Funkce U(M) je pak řešením Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2 U(M) + k^2 U(M) = 0\,, \tag{3}$$

kde $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$, přičemž λ je vlnová délka záření v daném prostředí. Řešení difrakční úlohy spočívá v řešení Helmholtzovy rovnice (3), kde funkce U(M) splňuje vhodné okrajové podmínky.

Metoda Greenovy funkce

Řešení Helmholtzovy rovnice (3) nyní provedeme metodou Greenovy funkce [2,6,7] a dostáváme

$$U(P) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[G(M,P)\frac{\partial U(M)}{\partial n} - U(M)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n} \right] dS\,, \tag{4}$$

kde G(M,P) je Greenova funkce našeho problému a vyhovuje rovnici

$$\nabla^2 G(M,P) + k^2 G(M,P) = -4\pi\delta(M,P)$$

a splňuje na hraniční ploše S okrajovou podmínku

$$\left(a_1 G(M,P) + a_2 \frac{\partial G(M,P)}{\partial n} \right)_S = 0 \quad \text{pro} \quad M \in S\,,$$

kde $a_1=a_1(M)$ a $a_2=a_2(M)$ jsou spojité funkce na S přičemž $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ a $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. $\partial G/\partial n$ značí derivaci ve směru vnější normály k ploše S.

Vztah (4) nám umožňuje určit stav pole v libovolném bodě P uvnitř oblasti uzavřené plochou S známe-li stav pole na této hraniční ploše a Greenovu funkci G. Vztah (4) má centrální význam ve skalární teorii difrakce.

Např. v případě difrakce na otvoru o ploše S_1 lze Greenovu funkci volit tak aby na ploše S_1 byla nulová ($G(M,P)\big|_{S_1} = 0$). Vztah (4) pak má tvar

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} U(M)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n}\, dS_1\,.$$

Úhlové spektrum rovinných vln

Řešení Helmholtzovy rovnice (3) hledejme ve tvaru dvojrozměrné Fourierovy transformace

$$U(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(p,q,z)\exp\left[ik(px+qy)\right] dp\,dq\,, \tag{5}$$

kde x,y,z jsou pravoúhlé souřadnice.

Dosazením (5) do (3) dostáváme pro neznámou funkci A(p,q,z) následující rovnici

$$\frac{d^2A(p,q,z)}{dz^2} + k^2\left(1 - p^2 - q^2\right)A(p,q,z) = 0 .$$

Toto je obyčejná diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a její partikulární řešení má tvar

$$A(p,q,z) = C(p,q)\exp\left(ikz\sqrt{1 - p^2 - q^2}\right),$$

kde C(p,q) je integrační konstanta. Předpokládejme, že známe řešení U(x,y,0) rovnice (3) v rovině z = 0. Z předcházejícího vztahu můžeme tedy určit integrační konstantu, platí

$$C(p,q) = A(p,q,0) = A(p,q) .$$

Řešení (5) rovnice (3) můžeme v poloprostoru $z \geq 0$ psát ve tvaru *spektra rovinných vln*

$$U(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(p,q)\exp\left[ik(px + qy + mz)\right] dpdq , \tag{6}$$

kde

$$m = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \quad \text{pro} \quad p^2 + q^2 \leq 1$$
$$m = i\sqrt{p^2 + q^2 - 1} \quad \text{pro} \quad p^2 + q^2 > 1$$

Vztah (6) vyjadřuje pole jako superpozici dvou typů rovinných vln a to:

1. Homogenních vln

$$A(p,q)\exp\left[ik(px + qy + mz)\right] ,$$

$$m = \sqrt{1 - p^2 - q^2} ,$$

$$p^2 + q^2 \leq 1 ,$$

majících amplitudu A(p,q) a směrové kosiny (p,q,m) normály vlnoplochy a šířících se ve všech možných směrech svírajících s kladným směrem osy z úhly Θ ($-\pi/2 \leq \Theta \leq \pi/2$) .

2. Nehomogenních (evanescentních) vln

$$A(p,q)\exp(-k|m|z)\exp\left[ik(px + qy)\right] ,$$

$$|m| = \sqrt{p^2 + q^2 - 1} ,$$

$$p^2 + q^2 > 1 ,$$

šířících se ve všech možných směrech kolmo k ose z a exponenciálně tlumených s rostoucím z.

Abychom tedy určili pole U(x,y,z) v bodě (x,y,z) známe-li pole U(x,y,0) v rovině z = 0, musíme provést následující kroky:

a) určíme A(p,q) ze vztahu

$$A(p,q) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(x,y,0) \exp\left[-ik(px+qy)\right] dxdy\,, \tag{7}$$

b) pole U(x,y,z) určíme ze vztahu

$$U(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(p,q) \exp\left[ik(px+qy+mz)\right] dpdq\,. \tag{8}$$

3 Vektorové vlnové pole

V obecném případě vektorových polí je nutno řešit soustavu Maxwellových rovnic spolu s příslušnými materiálovými rovnicemi. Omezíme-li se na prostředí bez nábojů a proudů a na pole harmonická v čase, dostáváme z Maxwelových rovnic následujíc vztahy pro vektor **E**(**r**) intenzity elektrického pole a vektor **H**(**r**) intenzity magnetického pole, platí [2]

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0\,, \quad \mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r}) = 0\,, \quad \nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) = 0\,, \quad \mathrm{div}\,\vec{H}(\vec{r}) = 0\,, \tag{9}$$

kde **r** = (x,y,z) je polohový vektor.

Úhlové spektrum rovinných vln

Užijeme-li pro řešení rovnic (9) analogického postupu jako ve skalárním případě, dostáváme

$$\begin{aligned} A_x(p,q) &= \frac{1}{\lambda^2} \exp(-ikmz_0) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x,y,z_0) \exp\left[-ik(px+qy)\right] dxdy\,, \\ A_y(p,q) &= \frac{1}{\lambda^2} \exp(-ikmz_0) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x,y,z_0) \exp\left[-ik(px+qy)\right] dxdy\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Elektromagnetické pole je tedy zcela určeno, známe-li pole $E_x(x,y,z_0)$ a $E_y(x,y,z_0)$ v rovině $z = z_0$, nebo ekvivalentně pomocí $A_x(p,q)$ a $A_y(p,q)$.

Shrneme-li dosažené výsledky, dostáváme pro složky vektoru intenzity elektrického pole [2]

$$\begin{aligned} E_x(x,y,z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_x(p,q) \exp\left[ik(px+qy+mz)\right] dpdq\,, \\ E_y(x,y,z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_y(p,q) \exp\left[ik(px+qy+mz)\right] dpdq\,, \\ E_z(x,y,z) &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{p}{m} A_x(p,q) + \frac{q}{m} A_y(p,q)\right] \exp\left[ik(px+qy+mz)\right] dpdq\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Složky vektoru intenzity magnetického pole jsou

$$H_x(x,y,z) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\frac{pq}{m}A_x(p,q) + \frac{1-p^2}{m}A_y(p,q)]\exp\left[ik(px+qy+mz)\right]dpdq\,,$$

$$H_y(x,y,z) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1-q^2}{m}A_x(p,q) + \frac{pq}{m}A_y(p,q)]\exp\left[ik(px+qy+mz)\right]dpdq\,, \tag{12}$$

$$H_z(x,y,z) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[qA_x(p,q) - pA_y(p,q)]\exp\left[ik(px+qy+mz)\right]dpdq\,.$$

Vztahy (10), (11) a (12) jsou tedy reprezentací elektromagnetického pole pomocí úhlového spektra rovinných vln.

Metoda Greenovy funkce

Známe-li stav elektromagnetického pole v rovině $z_M = 0$ tj. známe vektory **E**(M) a **H**(M) pro libovolný bod M roviny $z_M = 0$. Užitím analogického postupu jako ve skalárním případě, dostáváme řešením soustavy rovnic (9) následující vztahy pro jednotlivé složky vektoru intenzity elektrického pole

$$E_x(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1} E_x(M)\left[\frac{\partial}{\partial z_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} dx_M\, dy_M$$

$$E_y(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1} E_y(M)\left[\frac{\partial}{\partial z_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} dx_M\, dy_M \tag{13}$$

$$E_z(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\left\{E_x(M)\left[\frac{\partial}{\partial x_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} + E_y(M)\left[\frac{\partial}{\partial y_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0}\right\} dx_M\, dy_M\,.$$

Pro složky vektoru intenzity magnetického pole H platí

$$H_x(P) = \frac{1}{2\pi i\omega\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l} E_x(M)\dfrac{\partial}{\partial y_P}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_M}\left(\dfrac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \\ + E_y(M)\left[\dfrac{\partial}{\partial y_P}\dfrac{\partial}{\partial y_M}\left(\dfrac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \\ + E_y(M)\left[\dfrac{\partial}{\partial z_P}\dfrac{\partial}{\partial z_M}\left(\dfrac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \end{array}\right\} dx_M\, dy_M\,,$$

$$H_y(P) = -\frac{1}{2\pi i\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & E_x(M) \frac{\partial}{\partial z_P}\left[\frac{\partial}{\partial z_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \\ & + E_x(M)\left[\frac{\partial}{\partial x_P}\frac{\partial}{\partial x_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \\ & + E_y(M)\left[\frac{\partial}{\partial x_P}\frac{\partial}{\partial y_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \end{aligned} \right\} dx_M\, dy_M\,, \tag{14}$$

$$H_z(P) = -\frac{1}{2\pi i\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & E_y(M) \frac{\partial}{\partial x_P}\left[\frac{\partial}{\partial z_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \\ & - E_x(M)\left[\frac{\partial}{\partial y_P}\frac{\partial}{\partial z_M}\left(\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\right)\right]_{z_M=0} \end{aligned} \right\} dx_M\, dy_M\,.$$

kde r_{PM} je vzdálenost libovolného bodu M v rovině $z_M = 0$ od bodu P, ve kterém určujeme vektory elektromagnetického pole tj. platí

$$r_{PM} = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2}\ .$$

4 Závěr

V práci byly uvedeny dvě metody řešení šíření elektromagnetického pole prostorem a to jak pro pole skalární tak i pro pole vektorové. Nalezené obecné vztahy nám umožňují efektivně řešit řadu praktických úloh např. v oblasti interakce vlnového pole s materiálovým objektem, problematiku difrakce elektromagnetických vln a v dalších oblastech. Pro numerické řešení uvedené problematiky je velmi vhodné výpočetní prostředí MATLAB, které v sobě obsahuje mnoho funkcí a procedur (numerická integrace, FFT algoritmy atd.), které jsou potřebné při řešení konkrétních úloh z praxe.

Práce byla vypracována za podpory grantu GAČR 102/04/0898.

Literatura

[1] Straton, J.A.: *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.
[2] Mikš, A.: *Aplikovaná optika 10*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2000.
[3] Born, M., Wolf, E.: Principles of Optics, Cambridge University Press, Cambridge, 2003
[4] Baker, B.B., Copson, E.T.: *The Mathematical Theory of Huygens' Principle.* Chelsea Pub.Co,1988
[5] Bouwkamp, C. J. *Diffraction Theory.* Rep. Prog. Phys. **17**, 35-100, 1949.
[6] Sommerfeld, A.: *Lectures on Theoretical Physics: Optics*., Academic press, 1954
[7] Tikhonov, A.N., Samarskii ,A.A.: *Equations of Mathematical Physics*, Dover Publ., 1990

Prof.RNDr.Antonín Mikš,CSc., Katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6
tel: 224354948, fax: 233333226, e-mail: miks@fsv.cvut.cz

Ing. Jiří Novák, PhD., Katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
tel: 224354345, fax: 233333226, e-mail: novakji@fsv.cvut.cz

Ing. Pavel Novák, Katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
tel: 224354345, fax: 233333226, e-mail: xnovakp9@fsv.cvut.cz