MODELOVÁNÍ A ŘÍZENÍ INVERZNÍHO KYVADLA

Michalík Michal

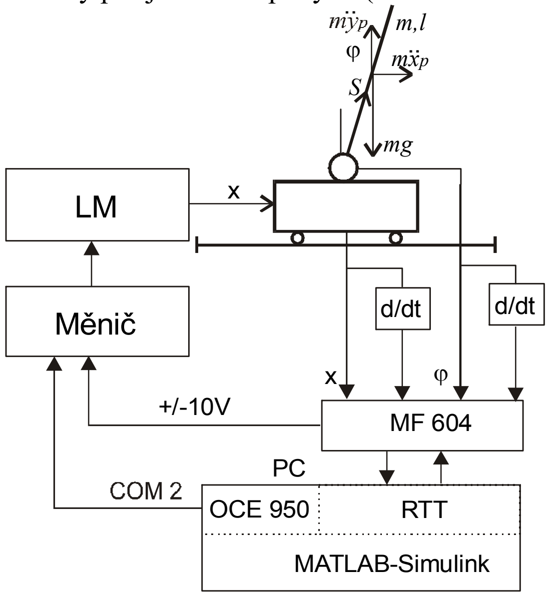
Katedra elektromechaniky a výkonové elektroniky, Západočeská univerzita v Plzni

Abstrakt

Tento příspěvek se zabývá rovinnou úlohou simultánního balancování inverzního kyvadla s použitím lineární stavové teorie regulace. Úloha sice nemá výraznou praktickou aplikaci, je však zajímavá z hlediska řízení složitých mechanických systémů. Obecné teoretické výpočty jsou omezeny pouze na případ s jedním kyvadlem, který byl též simulován a realizován. Program MATLAB a jeho doplňky s vhodně zvoleným hardwarovým vybavením tvoří ucelený nástroj k teoretickému rozboru, simulaci i řízení reálných regulačních obvodů.

1 Popis systému inverzního kyvadla na vozíku

Rovinný dynamický systém s vozíkem a inverzním kyvadlem viz obrázku 1 je popsán pohybovými rovnicemi za zjednodušujícího předpokladu, že reakce v čepech uložení kyvadla neovlivní dynamiku pojezdu vozíku. To je splněno volbou dostatečně silného motoru. Dalším předpokladem je, že kyvadlo ani vozík nejsou deformované. Těžiště zátěže se tedy bude za všech okolností nacházet v jedné ose s kyvadlem. Rovnice popisující tento mechanický systém jsou odvozeny pro jednu osu pohybu (zanedbáno stranové vychýlení kyvadla).



m	hmotnost kyvadla
x	poloha vozíku
φ	úhel kyvadla
g	tíhové zrychlení
l	vzdálenost těžiště
x_p	poloha těžiště kyvadla

Obrázek 1: Inverzní kyvadlo na vozíku

1.1 Pohybové rovnice inverzního kyvadla a pohonu

Teoretickým předpokladem je soustředění celé hmotnosti do středu kyvadla. Zanedbáním momentu setrvačnosti a tření v čepu vychází pohybová rovnice pro kyvadlo viz obrázek 1

$$\ddot{x}_p \cdot \cos\varphi - \ddot{y}_p \cdot \sin\varphi = g \cdot \sin\varphi \,. \tag{1}$$

Pro druhé derivace souřadnic vozíku platí

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= \ddot{x} - l \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cdot \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y}_p &= -l \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \cdot \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{aligned} \,. \tag{2,3}$$

Po dosazení souřadnic vozíku rovnice (1) získáme

$$\left(\ddot{x} - l \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cdot \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}\right) \cdot \cos\varphi + \left(l \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cdot \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi}\right) \cdot \sin\varphi = g \cdot \sin\varphi \,. \tag{4}$$

Z teorie systémů je známo, že tento systém má dva rovnovážné stavy (nestabilní pro $\varphi \approx 0$ a stabilní pro $\varphi \approx \pi$). Lineární aproximací přes $\varphi \approx 0$ se získává pro malý úhel kyvadla od vertikály φ následující aproximace:

$$\cos\varphi \approx 1$$
$$\sin\varphi \approx \varphi$$

Lineární aproximací rovnice (4) v nestabilním bodě $\varphi \approx 0$ a menší úpravou vychází následující linearizovaná pohybová rovnice v okolí nestabilního stavu

$$\ddot{x} + l \cdot \ddot{\varphi} - g \cdot \varphi = 0 . \tag{5}$$

V našem případě je použit lineární motor napájený tranzistorovým měničem s pulsní šířkovou modulací. Pro praktický návrh parametrů regulátoru je možné nastavit měnič do režimu regulace polohy, rychlosti nebo síly. Pro tento případ je nejvhodnější uvažovat jako vsup soustavy analogový vstupní signál měniče. Pro motor je zavedena zpětnovazební regulace rychlosti, jejíž průběh se bude předpokládat aperiodický a tedy bude přibližně platit

$$T\ddot{x} + \dot{x} = KU(t) , \tag{6}$$

kde T…časová konstanta celého pohonu, K…zesílení rychlostního servopohonu, $U(t)$…řídící napětí regulátoru rychlosti. Aby bylo možné systém řídit musí platit podmínka

$$T_K >> T \ , \tag{7}$$

kde T_K je doba kyvu kyvadla.

1.2 Stavový model

Dosazením za zrychlení vozíku z rovnice (6) do rovnice (5) a po malé úpravě dostáváme stavové rovnice zjednodušeného linearizovaného systému

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{1}{T}\dot{x} + \frac{K}{T}U \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{lT}\dot{x} + \frac{g}{l}\varphi - \frac{K}{lT}U \end{aligned} . \tag{8, 9}$$

Nyní lze snadno napsat stavové rovnice v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} , \tag{10, 11}$$

kde vstup $\mathbf{u}$ je napětí regulátoru rychlosti, výstup $\mathbf{y}^T = [x \quad \varphi]$ a stavový vektor $\mathbf{x}$ je dán jako $\mathbf{x}^T = [x \quad \dot{x} \quad \varphi \quad \dot{\varphi}]$. Vnitřní popis lineárního t-invariantního dynamického systému, tj. takového systému, jehož parametry se v čase nemění, je plně určen čtveřicí matic **A**, **B**, **C**, **D**. Matice **A** a **B** vyplývají rovnou z rovnic (8) a (9). V maticovém tvaru jsou

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{lT} & \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \\ 0 \\ -\frac{K}{lT} \end{bmatrix} . \tag{12, 13}$$

Jelikož pro **D**≠0 lze systém považovat za fyzikálně nerealizovatelný, což je i tento případ, platí předpoklad **D**≡0. Systémy s touto vlastností se nazývají ryze dynamické systémy. Nyní lze snadno napsat matici **C**, která přímo plyne z rovnice **y=Cx.**

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14, 15}$$

1.3 Vlastnosti stavového modelu

Charakteristický polynom matice **A** je

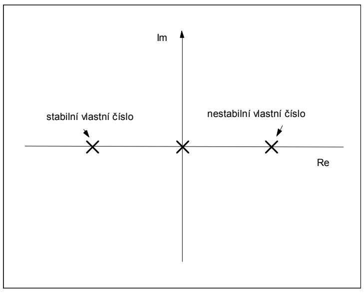
$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p^2 \left(p + \frac{1}{T} \right)\left(p^2 - \frac{g}{l} \right) \tag{16}$$

a kořeny rovnice $\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ jsou vlastní čísla matice **A**.

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \left\{ 0, -\frac{1}{T}, \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \right\} . \tag{17}$$

Systém (**A**) je stabilní právě tehdy, mají-li všechna jeho vlastní čísla (póly systému) zápornou reálnou část, tj. leží v levé komplexní polorovině. Musí tedy platit podmínka

$$Re\{\lambda_i\}<0 \qquad i=1,2,3,4. \tag{18}$$



Obrázek 2: Vlastní čísla matice **A**

Systém (**A**, **B, C**) je řiditelný a pozorovatelný, pokud mají matice $\mathbf{Q}_R$ a $\mathbf{Q}_P$ plnou hodnost.

$$\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_P = \begin{bmatrix}\mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3\end{bmatrix} \tag{19, 20}$$

2 Stabilizace systému - lineární kvadraticky optimální řízení (LQR)

Zesílení zpětných vazeb stavového řízení lze určit několika metodami. V MATLABU jsou pro toto řízení přímo definovány funkce, které mají co nejvíce usnadnit návrh. Pro zjišťování řiditelnosti a pozorovatelnosti se dá s výhodou použít funkce `CTRB` a `OBSV`, zatímco pro vlastní návrh regulátoru potom funkce `ACKER`, `LQR`, `LQRD` resp. `DLQR`. Myšlenka stavové zpětné vazby spočívá ve vytvoření signálu **u** závislého na stavu systému **u=-kx,** jak je znázorněno na Obrázku 3, kde **k** je ve tvaru:

$$\mathbf{kx} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 \tag{21}$$

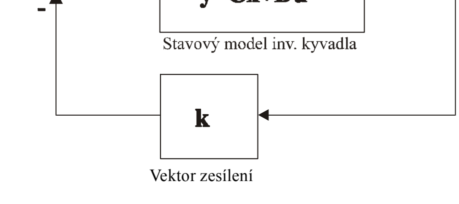
a minimalizuje následující kritérium optimality

$$J(u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} + \mathbf{u}^T\mathbf{Ru})dt \rightarrow \min, \tag{22}$$

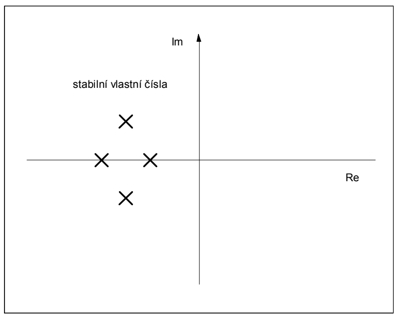
kde **S**, **Q** jsou pozitivně semidefinitní matice a **R** je pozitivně definitní matice. Řešení této úlohy je provedeno pomocí tzv. Riccatiho algebraické rovnice

$$\mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{SA} - \mathbf{SBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0, \qquad \text{potom} \qquad \mathbf{k} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}. \tag{23, 24}$$

Je-li systém (**A**, **B**) řiditelný, pak ustálené lineární kvadraticky optimální řízení existuje a stabilizuje daný systém.



Obrázek 3: Stavová zpětná vazba



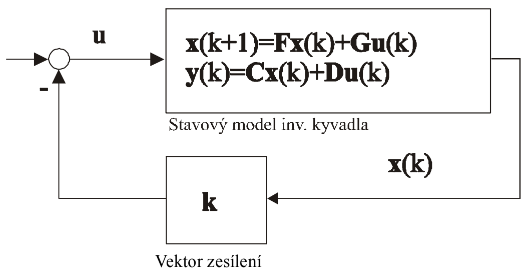
Obrázek 4: Vlastní čísla matice **A-Bk**

3 Vlastnosti diskrétních systémů

Po diskrétní transformaci je systém popsán diskrétními stavovými rovnicemi ve tvaru:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Fx}(k) + \mathbf{Gu}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k)\end{aligned}, \qquad (25, 26)$$

kde matice **F**, **G**, **C**, **D** mají podobný význam jako matice **A**, **B**, **C**, **D**.



Obrázek 5: Diskrétní systém-stavová zpětná vazba

Nevhodnou volbou periody vzorkování se může systém stát nestabilním. Proto je nutné vyšetřovat stabilitu diskrétního systému. Stabilita diskrétních systémů je definována obdobně jako u systémů spojitých. Lineární diskrétní systém (**F**) je stabilní právě tehdy, jsou-li vlastní čísla matice **F** (póly systému) v absolutní hodnotě menší než 1. Musí tedy platit podmínka

$$|\lambda_i| < 1 \; i = 1, 2, 3, 4. \qquad (27)$$

Dalším krokem je zjištění řiditelnosti a pozorovatelnosti diskrétního systému. Pro systém lze napsat matici řiditelnosti a pozorovatelnosti, které musí mít hodnost rovnou řádu systému, aby byl systém (**F, G, C**) řiditelný a pozorovatelný.

$$\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{FG} & \mathbf{F}^2\mathbf{G} & \mathbf{F}^3\mathbf{G}\end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_P = \begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & \mathbf{F}^T\mathbf{C}^T & \left(\mathbf{F}^T\right)^2\mathbf{C}^T & \left(\mathbf{F}^T\right)^3\mathbf{C}^T\end{bmatrix} \qquad (28, 29)$$

4 Simulace

Pro simulování přechodových jevů je možno vyjít buď z přenosové funkce, nebo přímo převést pohybové rovnice na blokové schéma. Zpětnovazební zesílení byla vypočtena v Matlabu pomocí funkce `LQR` viz Příloha. Za vstup **u** je zařazen blok „saturace“, který reprezentuje maximální možný rozsah analogového vstupu měniče a výstupu měřící karty na úrovni ±10V. Počáteční hodnoty polohy vozíku a kyvadla byly zvoleny nulové. To má praktické opodstatnění, neboť kyvadlo je na počátku ustáleno ve svislé poloze a vozík na středu lineárního vedení. Přechodová funkce je odezvou na skok vstupního napětí regulátoru rychlosti tj. přemístění vozíku o 0.1m. Parametry systému pro simulaci byly zvoleny aby co nejlépe popisovali reálný systém: l = 0.225m, T = 0.01s, K = 1. Dosazením parametrů l, K, T do rovnic (12, 13 a 14) jsou získány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 444.4 & 43.6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ -444.4 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systém (**A**, **C, B**) je <u>řiditelný</u> i <u>pozorovatelný</u> neboť platí *hod* ($\mathbf{Q}_R$) = 4 a *hod* ($\mathbf{Q}_P$) = 4,

$$\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix} 0 & 100 & -1\cdot10^4 & 100\cdot10^4 \\ 100 & -10000 & 100\cdot10^4 & -1\cdot10^8 \\ 0 & -444.4 & 4.44\cdot10^4 & -446\cdot10^4 \\ -444.4 & -44444 & -446.32\cdot10^4 & 44638\cdot10^4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 444 & 44 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 44444 & 0 & 44 \end{bmatrix}.$$

Systém (**A**) je <u>nestabilní</u>, neboť má kladný pól $\sqrt{(g/l)}$

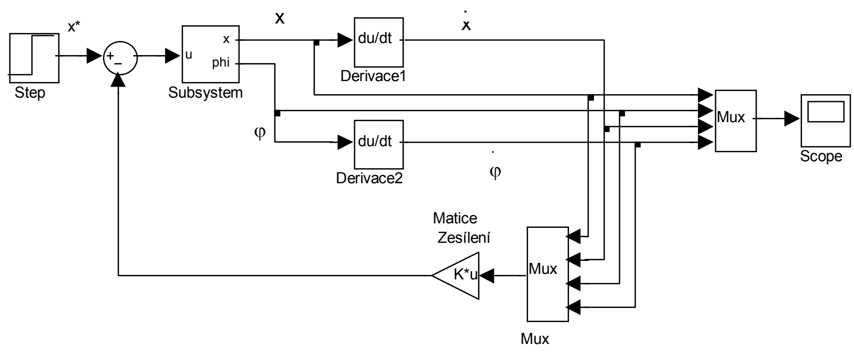
$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \left\{0, -\frac{1}{T}, \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\right\} = \{0; -100; +6.6; -6.6\}.$$

Po stabilizaci vektorem **k** = [-1; –2.3253; –3.8086; –0.5566] vypočteným pro simulaci vychází matice

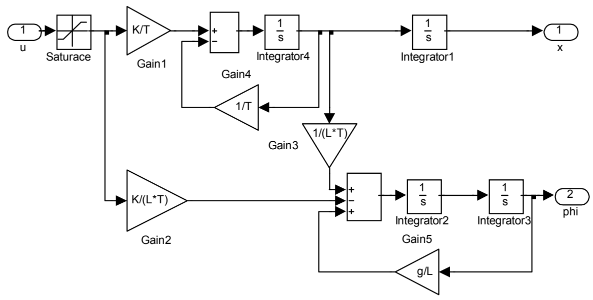
$$\mathbf{A}-\mathbf{Bk}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 100 & 132 & 380.9 & 55.7\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -444.4 & -589 & -1649.1 & -247.4\end{bmatrix}.$$

Systém (**A-Bk**) je <u>stabilní</u>, neboť platí $Re\{\lambda_i\}<0$ i=1, 2, 3, 4

$$\sigma(\mathbf{A}-\mathbf{Bk})=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}=\{-1.0056;-99.8951;-9.2194;-4.7078\}.$$

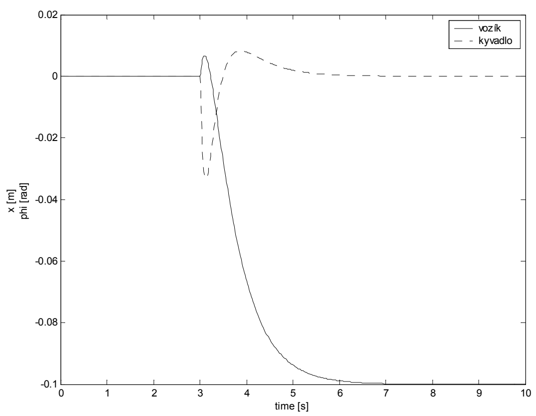


Obrázek 6: Simulační schéma

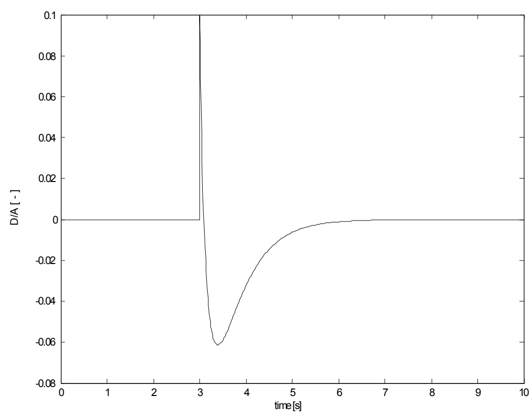


Obrázek 7: Vnitřní schéma bloku Subsystem

Systém je uveden do labilní polohy jednotkovým skokem požadované polohy vozíku o 10cm v čase 3s. Tím dojde k vychýlení kyvadla. V tomto okamžiku je přivedena odchylka na vstup regulátoru a regulátor začíná pracovat, přechodový děj je skončen za cca 4s.



Obrázek 8: Výsledky simulace

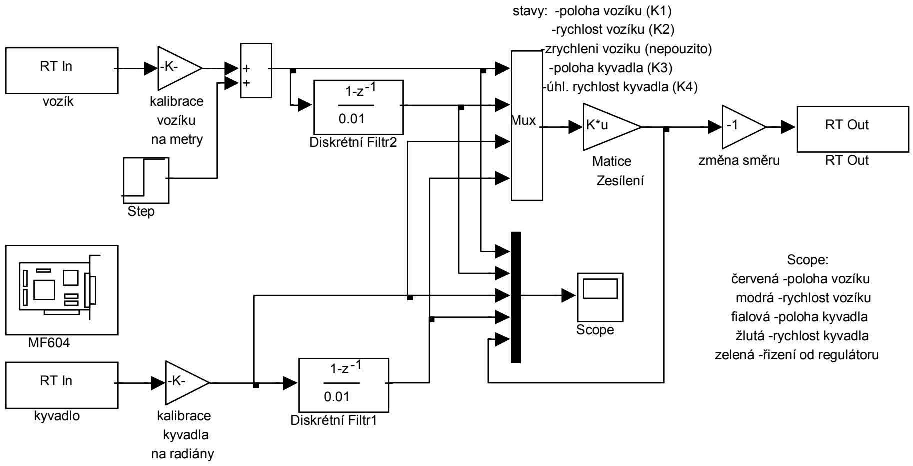


Obrázek 9: Výstup regulátoru

Z obrázku 9 je patrná maximální hodnota výstupu regulátoru +0.1. Při těchto hodnotách skokové změny polohy ještě nedochází k přesycení D/A převodníku.

5 Realizace

Laboratorní model je realizován lineárním motorem na jehož jezdci je upevněna mechanika kyvadla. Na snímání polohy vozíku a úhlu natočení kyvadla jsou použity inkrementální čidla. Výstupní signály z těchto snímačů jsou vzorkovány regulační kartou MF604 a zpracovány v programu MATLAB-Simulink doplněným o Real Time Toolbox, kde je také vytvořen stavový regulátor (obrázek 10). Perioda vzorkování byla zvolena 10ms, což je nejvyšší frekvence pro celou simulaci, které je možno dosáhnout na použitém PC. Experimentální výsledky ukazují, že je tato frekvence dostačující. Pro návrh zesílení zpětných vazeb je pro jednoduchost použita funkce v MATLABU `DLQR` viz Příloha. Pro periodu vzorkování 10ms vychází tato zesílení **k** = [-0.9286; -2.2354; -3.6533; -0.5351].



Obrázek 10: Regulační schéma

Parametry použitého kyvadla jsou: m = 0.26kg, L = 0.225m z těchto hodnot můžeme vypočítat dobu kyvu kyvadla $T_K = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{0.45}{9.81}} = 0.777s$, tím je splněna podmínka (7). Po diskretizaci periodou vzorkování T_s = 10ms vychází

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0063 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3679 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0164 & 1.0022 & 0.01 \\ 0 & 2.812 & 0.4363 & 1.002 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.0037 \\ 0.6321 \\ -0.0164 \\ -2.812 \end{bmatrix}.$$

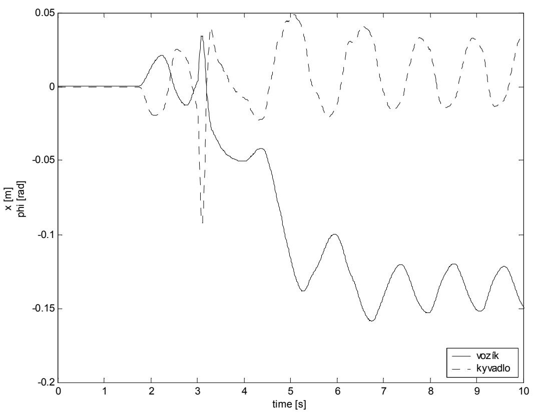
Diskrétní systém je <u>řiditelný</u> a <u>pozorovatelný</u> neboť platí *hod* ($\mathbf{Q}_R$) = 4 a *hod* ($\mathbf{Q}_R$) = 4,,

$$\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix} 0.0037 & 0.0077 & 0.0091 & 0.0097 \\ 0.6321 & 0.2325 & 0.0855 & 0.0315 \\ -0.0164 & -0.0342 & -0.0409 & -0.0438 \\ -2.812 & -1.0477 & -0.411 & -0.1892 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.0063 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0164 & 1.0022 & 0.01 \\ 1 & 0.0086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0506 & 1.0087 & 0.0201 \\ 1 & 0.0095 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0915 & 1.0197 & 0.302 \end{bmatrix}.$$

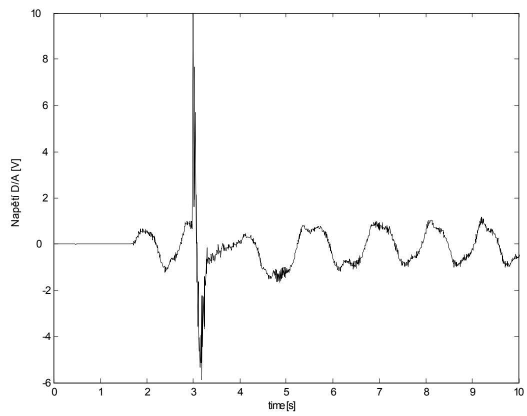
Systém (**F-Gk**) je <u>stabilní</u>, neboť platí $|\lambda_i| < 1$ i = 1, 2, 3, 4

$$\sigma(\mathbf{F}-\mathbf{Gk}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \{0.3683; 0.9119; 0.954; 0.99\}.$$

Výsledky experimentu jsou na Obrázcích 11 a 12, kde je záznam startu kyvadla ze svislé polohy jako při simulaci. Z průběhů je patrné kolísání kolem svislé polohy v rozmezí asi ±1°. Tomu odpovídá kolísání souřadnice vozíku okolo rovnovážné polohy v rozmezí asi pěti centimetrů. Z této polohy lze vozík řídit externím signálem, v realizovaném experimentu skokem požadované polohy vozíku v čase 3s. Z odezvy je patrné, že vozík zaujme novou rovnovážnou polohu. Ta se liší od startovní o 13cm.



Obrázek 11: Naměřené průběhy



Obrázek 12: Výstupní napětí regulátoru

Odchylka polohy oproti simulaci je způsobena nepřesným odečtením zesílení servopohonu. Řídící napětí na D/A převodníku je znázorněno na Obr. 12, kde je patrná maximální výchylka +10V takže nedošlo k nežádoucímu přesycení regulátoru. Při chvění stolu a stroje zaznamenávají kyvadla toto chvění a při vysoké citlivosti snímačů jejich výkyvu a velkém zesílení regulačních smyček může též vznikat samobuzené kmitání. Dalšími rušivými vlivy může být ohybové kmitání kyvadla, které je eliminováno dostatečným průřezem kyvadla a tření v čepu, které však působí kladně na průběh regulace.

Obrázek 13: Realizovaný model

6 Závěry

Chvění vozíku i kyvadla v rovnovážném stavu, které je patrné z naměřených průběhů, by bylo možné potlačit zvýšením rozlišovací schopnosti snímače úhlu natočení a změnou továrního nastavení regulátorů rychlosti, polohy a proudu. Při opakovaných experimentech může dojít k určitému rozptylu měření, kdy není přesně určen úhel kyvadla v okamžiku skokové změny řídící veličiny.

Riziko přesycení D/A převodníku lze odstranit volbou většího zesílení analogového vstupu. Zmenšením periody vzorkování by se systém více blížil spojitému systému. To však klade vyšší požadavky na výpočetní výkon. Možné by bylo použití modulu řízení v reálném čase Real-Time Windows Target, který umožňuje rychlejší zpracování signálů než Real Time Toolbox. Po těchto úpravách by byla prakticky řešitelná úloha současného balancování i dvou kyvadel na jednom vozíku. Dalším využitím této stavové regulace je řízení pojezdu kočky jeřábu s potlačením kývání.

Měnič frekvence s lineárním motorem umožňuje přímé řízení síly. Sestavením silového modelu inverzního kyvadla, kde vstupem by byla síla působící na vozík, lze dospět k dalšímu řešení stabilizace inverzního kyvadla. Řešení úlohy bez přijaté linearizace nebylo provedeno, neboť není realizovatelné s daným laboratorním vybavením a výpočetním výkonem.

Literatura

[1] *MF 604 Multifunction I/O Card –User's manual*, Humusoft, 1999.
[2] *Technický popis kompaktních servoměničů řady SCE900*, Pacific Scientific, 1998 .
[3] http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/.
[4] Valášek, M. a kolektiv: *Mechatronika*, ČVUT Praha, 1995.
[5] Schmidtmayer, J.: *Maticový počet a jeho použití v technice,* SNTL Praha, 1967.
[6] Michalík, M. *Problematika řízení polohy lineárního motoru určeného pro inverzní kyvadlo,* Diplomová práce ZČU v Plzni, 2004

Michal Michalík Ing.
michalm@kev.zcu.cz tel. +420 37763 4427
Západočeská univerzita v Plzni
Katedra výkonové elektroniky a elektromechaniky
Univerzitní 26
Plzeň 306 14