NÁVRH PREDIKTIVNÍCH REGULÁTORŮ POMOCÍ MINIMALIZACE l_p NORMY V PROSTŘEDÍ MATLAB

*Jaroslav Pekař *, Jan Štecha *, Vladimír Havlena *, ***

* Katedra řídicí techniky,
Fakulta elektrotechnická,
České vysoké učení technické v Praze.

** Honeywell Prague Laboratory in Prague,
Honeywell Intl.

1. Úvod

Prediktivní regulace (**M**odel-based **P**redictive **C**ontrol, MPC) [2, 3] se stala jednou z pokročilých metod řízení, která nachází široké uplatnění při řízení procesů v průmyslové výrobě. Předností této metody je relativní jednoduchost, přirozená možnost řízení rozsáhlých systémů, systémů s mnoha vstupy a výstupy, možnost klást požadavky na omezení veličin v řízeném procesu a podobně.

Při návrhu MPC regulátoru se vychází ze znalosti modelu systému (např. přechodová nebo impulsní charakteristika, přenosová funkce, stavový model), pomocí něhož odhadujeme budoucí trajektorie výstupních veličin. Dalším důležitým prvkem při návrhu MPC je volba vhodného kritéria, jehož optimalizací (minimalizací) získáme na základě predikce trajektorií výstupů optimální trajektorie vstupních veličin pro daný horizont. Kritérium (ztrátová funkce) bývá obvykle voleno jako druhá mocnina odchylky predikce výstupu od referenčního signálu – jinými slovy kvadratická norma. V takovém případě vede minimalizace na úlohu nejmenších čtverců (**L**east **S**quares). Pokud budeme uvažovat omezení některých veličin, získáme úlohu kvadratického programování (**Q**uadratic **P**rogramming). Pokud použijeme pro kritérium l_1 nebo l_{inf} normu, můžeme problém definovat jako úlohu lineárního programování (**L**inear **P**rogramming) [7, 8]. Použití l_1 normy v MPC řízení je uvedeno v mnoha pracích, např. [4, 5, 6].

Cílem článku je experimentální ověření vlastností a chování systému řízeného prediktivním regulátorem v závislosti na volbě druhu lp normy, kde p budeme uvažovat z intervalu

$$p \in \langle 1, 2 \rangle .$$

Z výše uvedeného je zřejmé, že budeme potřebovat řešit úlohy lineárního a kvadratického programování, k čemuž využijeme funkce Matlabu z optimalizačního toolboxu.

2. Prediktivní regulátor minimalizující lp normu

Pro návrh MPC regulátoru použijeme stavový popis systému ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) \quad &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} ,$$

kde x(t), y(t) a u(t) je stav, výstup a vstup systému. A, B, C, a D jsou matice systému. Dále je třeba nadefinovat kritérium optimalizace

$$J = \sum_{t=1}^{N} \|y(t) - w(t)\|_p^p + r\|u(t)\|_p^p \ ,$$

nebo častěji používaný tvar, kde nepenalizujeme velikost vstupního signálu, ale rychlost jeho změny, tj.

$$J = \sum_{t=1}^{N} \|y(t) - w(t)\|_p^p + r\|\Delta u(t)\|_p^p \ .$$

Po zavedení matic

$$S = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3} & \dots & D \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-2} & CA^{N-3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & \left(A^T\right)^{N-1} C^T \end{bmatrix}$$

a vektorů predikce výstupu, vstupu a reference

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & \dots & y(N) \end{bmatrix}^T, \ U = \begin{bmatrix} u(1) & \dots & u(N) \end{bmatrix}^T$$

$$W = \begin{bmatrix} w(1) & \dots & w(N) \end{bmatrix}^T$$

můžeme kritérium přepsat do maticového tvaru

$$J = \|Y - W\|_p^p + r\|U\|_p^p = \|SU + Px(1) - W\|_p^p + r\|U\|_p^p = \left\| \begin{bmatrix} S \\ r^{1/p} I \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} Px(1) - W \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_p^p$$

Optimální posloupnost řízení získáme minimalizací předchozího vztahu, tedy

$$U^* = \min_U \left\{ \|SU + Px(1) - W\|_p^p + r\|U\|_p^p \right\} .$$

Pro návrh MPC regulátoru můžeme obecně použít l_p normu. V tomto článku se zaměříme na p z intervalu <1, 2>. Minimalizaci l_p normy v daném intervalu nelze řešit jedním algoritmem, proto je třeba interval rozdělit na tři části:

- Minimalizace l_1 normy – úlohu lze formulovat jako lineární program.

- Minimalizace l_p normy, kde p je z intervalu (1, 2) – tento optimalizační problém řeší algoritmus **I**teratively **R**eweighted **L**est **S**quares (iterativní vážené nejmenší čtverce).

- Minimalizace l_2 normy – jedná se o standardní **L**east **S**quares problém.

Nejprve se podívejme na okrajové případy, tj. na l_1 a l_2 normu. V případě minimalizace l_2 můžeme jednoduše nalézt analytický tvar řešení

$$U^* = -\left(S^T S + rI\right)^{-1} S^T \left(Px(1) - W\right).$$

Pokud budeme chtít zavést omezení na některé veličiny v regulačním obvodu, je třeba minimalizaci řešit numericky, pomocí kvadratického programování. Úlohu kvadratického programování vyřešíme v Matlabu funkcí *quadprog*.

Minimalizaci l_1 normy lze převést na úlohu lineárního programování, a to následujícím způsobem (obecně):

$$\min_x \|Ax - b\|_1 \Leftrightarrow \min_y \left\{1^T y : Ax - b \le y,\ Ax - b \ge -y\right\}.$$

Po zavedení nového vektoru $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ získáme standardní úlohu lineárního programování ve tvaru

$$\min_z \left\{c^T z : \overline{A} z \le \overline{b}\right\};\ c^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & -I \\ -A & -I \end{bmatrix};\ \overline{b} = \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

Úlohu lineárního programování řeší v Matlabu funkce *linprog*.

V posledním případě, tj. minimalizace l_p normy pro p z intervalu (1, 2), použijeme iterativní algoritmus vážených nejmenších čtverců. Máme tedy následující úlohu

$$\min_x \left\{\Psi(x) = \|Ax - b\|_p^p\right\},\quad 1 < p < 2.$$

Uvažujme, že všechny složky vektoru $\varepsilon(x) = b - Ax$ jsou nenulové. Pak můžeme funkci $\Psi(x)$ definovat následovně:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{m} \left|\varepsilon_i(x)\right|^p = \sum_{i=1}^{m} \left|\varepsilon_i(x)\right|^{p-2} \varepsilon_i(x)^2 .$$

Minimalizace předchozí rovnice jsou vážené nejmenší čtverce:

$$\min_x \left\| D(\varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \left(b - Ax\right) \right\|_2,\quad D(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left(|\varepsilon|\right).$$

Z důvodu závislosti diagonální matice $D(\varepsilon)$ na neznámém řešení x musíme minimalizaci řešit iterativně. Algoritmus pak vypadá následovně:

1. $\varepsilon^{(k)} = b - Ax^{(k)}$
2. $D^{(k)} = \mathrm{diag}\left(\left| \varepsilon^{(k)} \right|^{\frac{p-2}{2}} \right)$
3. $\delta x^{(k)} = \arg\min_{\delta x} \left\| D^{(k)} \left(\varepsilon^{(k)} - A\delta x \right) \right\|_2$
4. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x^{(k)}$

Výpis funkce iterativních vážených nejmenších čtverců matlabu:

```
function x = lpnorm(A,b,p,e)

Nmax =1000;
x = A\b;
if (sum(x_p)~=0)
   for k=1:Nmax
      r = b - A*x;
      D = diag(abs(r).^((p-2)/2));
      dx = (D*A)\(D*r);
      if(norm(dx)<e)
         return;
      end
      x = x + dx;
   end

end
```

3. Simulace

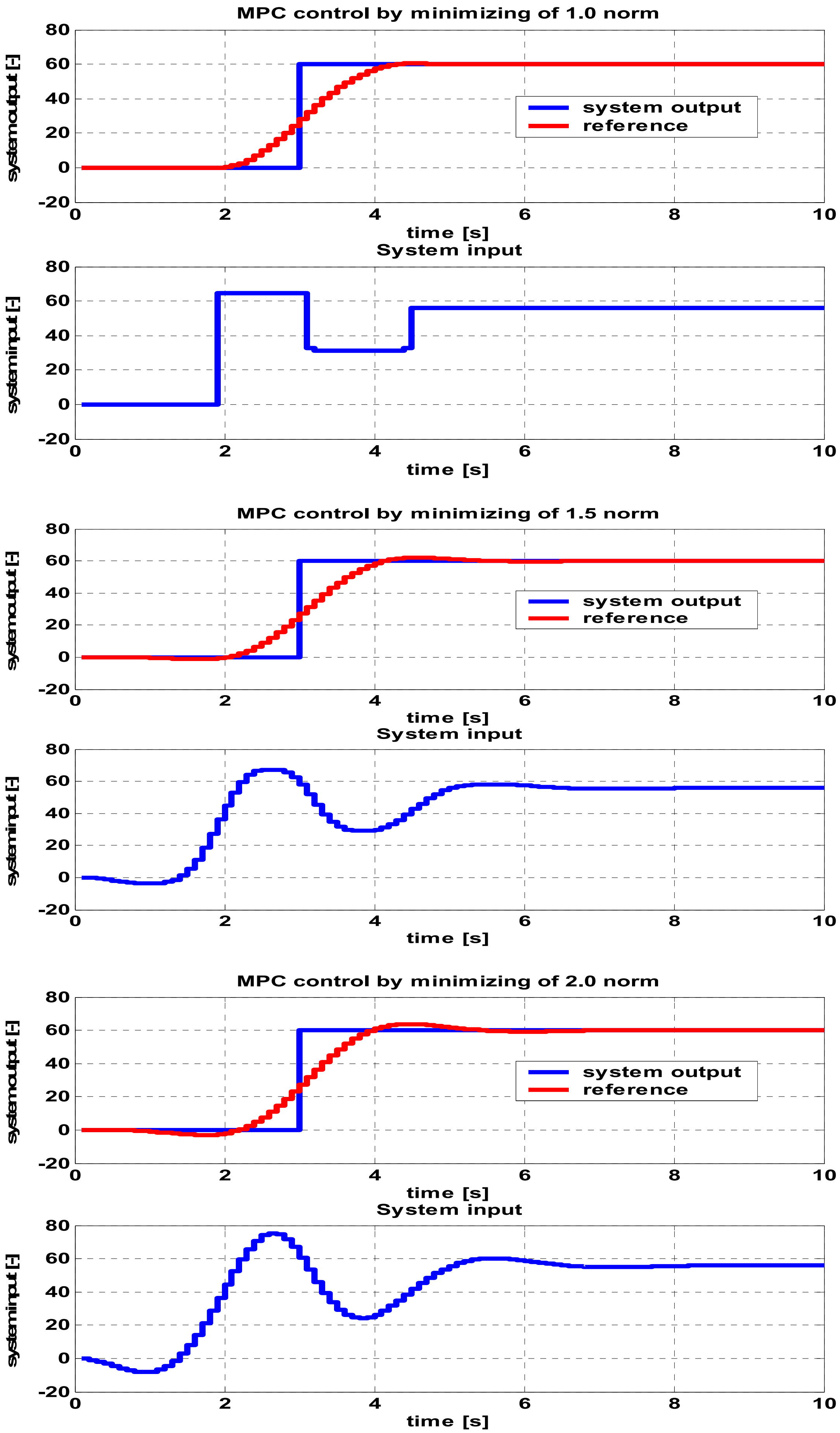
V této kapitole si uvedeme příklad, na kterém ukážeme vliv typu l_p normy, váhového koeficientu r a délky horizontu predikce na průběhy veličin při MPC regulaci. Uvažujme systém druhého řádu zadaného pomocí přenosové funkce:

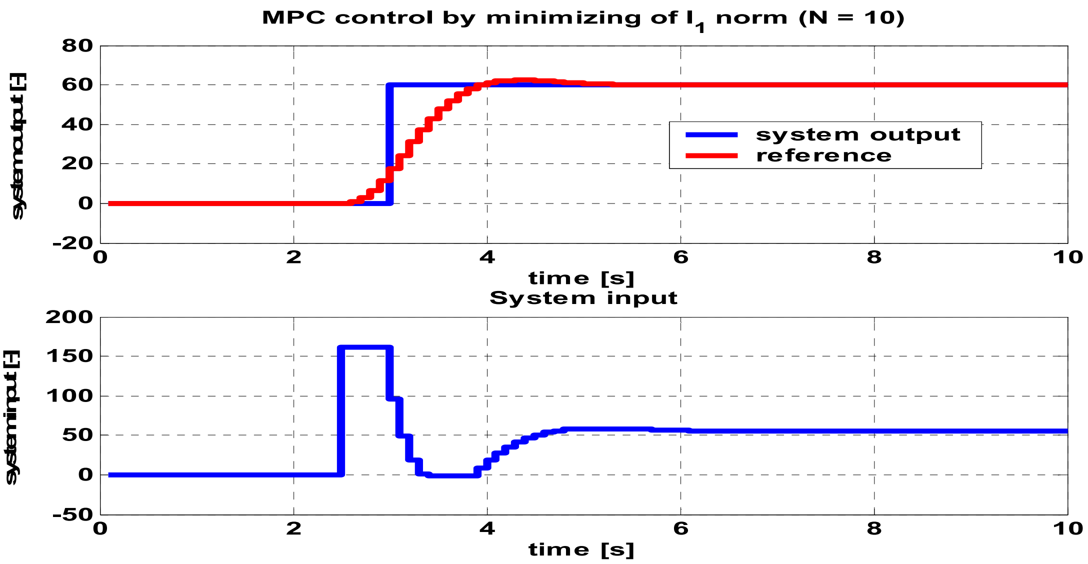
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.7s + 0.93}.$$

Systém je vzorkován s periodou $T_s = 0.1s$. Při návrhu řízení máme tři volné parametry pro ladění vlastností regulátoru, tj. druh l_p normy, horizont predikce N a váhový koeficient r. Provedeme následující tři experimenty:

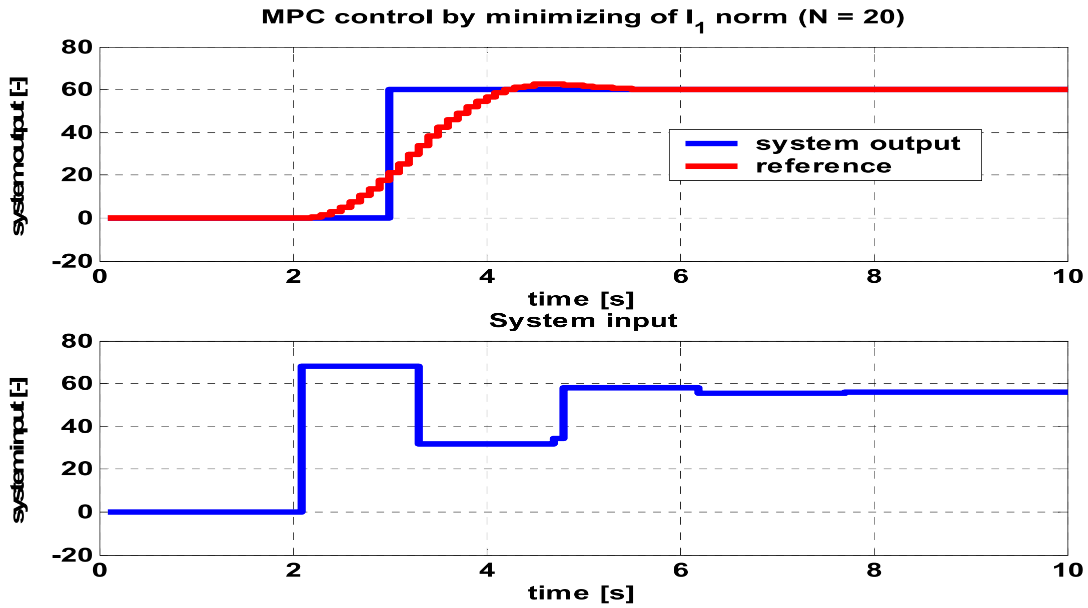
1. Vliv typu lp normy (pevný horizont predikce, pevný váhový koeficient).
2. Vliv váhového koeficientu r (pevná norma, pevný horizont predikce).
3. Vliv délky horizontu predikce (pevná norma, pevný váhový koeficient).

Na následujících třech stránkách jsou uvedeny výsledky simulací všech tří experimentů. První stránka ukazuje vliv typu l_p normy pro $p=1, p=1.5, p=2$ (pevné N=30, r=1). Na druhé stránce je ukázán vliv váhového koeficientu $r=0.1, r=1, r=2$ (pro l_1 normu, N=30). Třetí stránka ukazuje vliv délky horizontu predikce $N=10, N=20, N=50$ (pro l_1 normu, r=1).

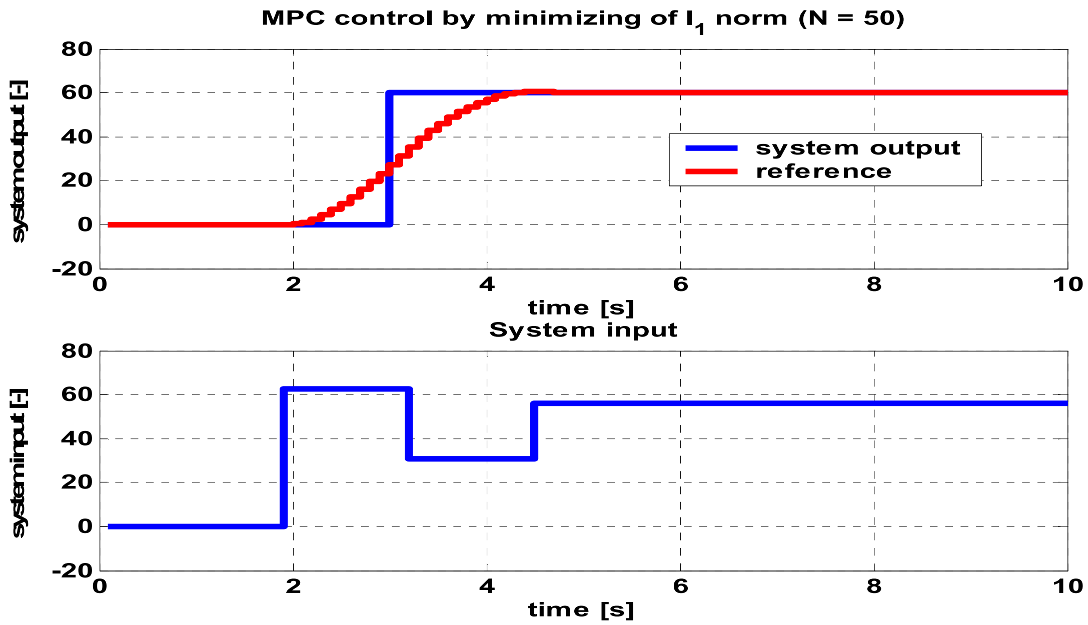

MPC control by minimizing of 1.0 norm
system output
reference
systemoutput [-]
time [s]
System input
systeminput [-]
time [s]
MPC control by minimizing of 1.5 norm
system output
reference
systemoutput [-]
time [s]
System input
systeminput [-]
time [s]
MPC control by minimizing of 2.0 norm
system output
reference
systemoutput [-]
time [s]
System input
systeminput [-]
time [s]



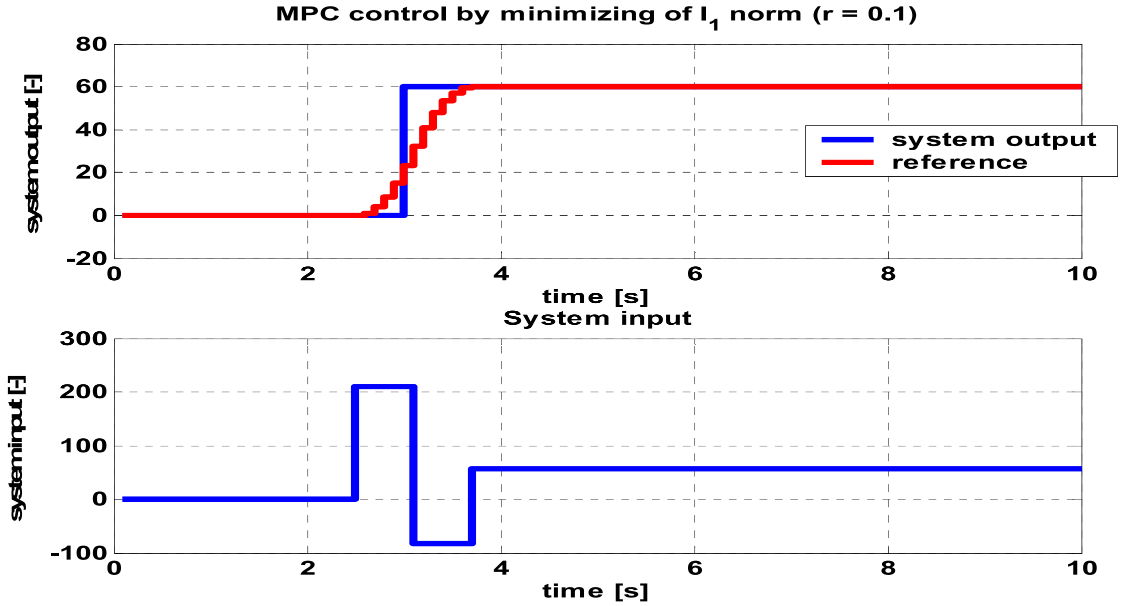
MPC control by minimizing of l1 norm (N = 10)
system output
reference
systemoutput [-]
time [s]
System input
systeminput [-]
time [s]

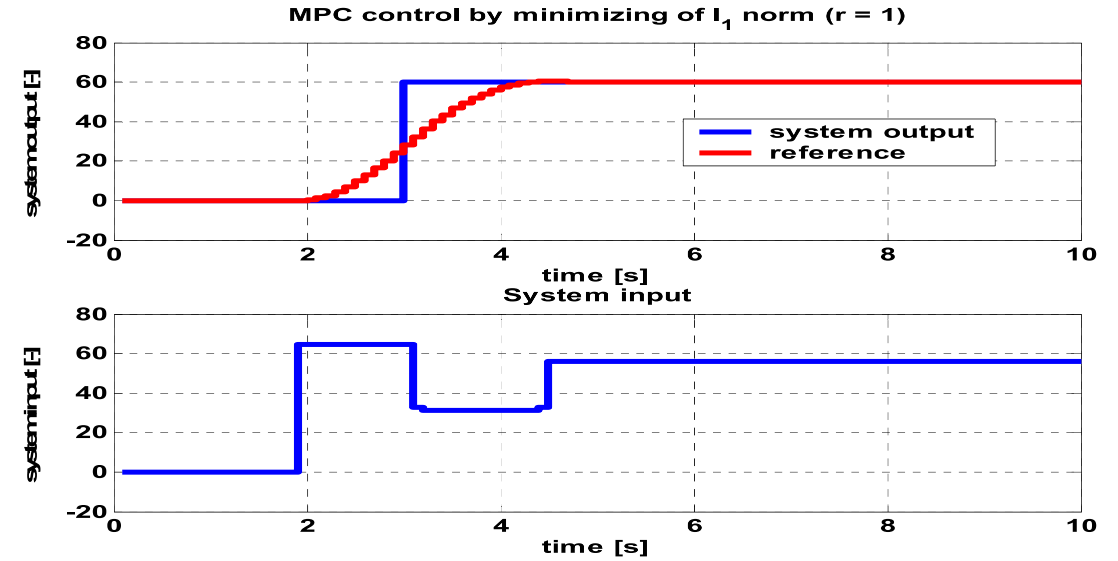


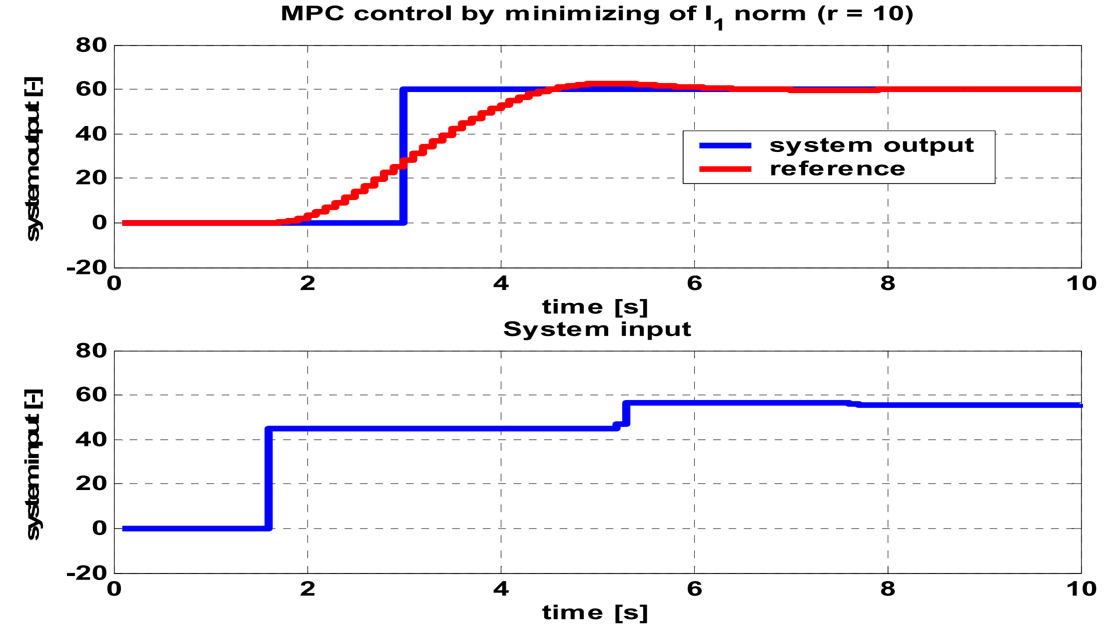
MPC control by minimizing of l1 norm (N = 20)
system output
reference
systemoutput [-]
time [s]
System input
systeminput [-]
time [s]



MPC control by minimizing of l1 norm (N = 50)
system output
reference
systemoutput [-]
time [s]
System input
systeminput [-]
time [s]


MPC control by minimizing of l_1 norm (r = 0.1)
systemoutput [-]
time [s]
system output
reference
System input
systeminput [-]
time [s]


MPC control by minimizing of l_1 norm (r = 1)
systemoutput [-]
time [s]
system output
reference
System input
systeminput [-]
time [s]


MPC control by minimizing of l_1 norm (r = 10)
systemoutput [-]
time [s]
system output
reference
System input
systeminput [-]
time [s]

4. Závěr

Cílem práce bylo experimentální ověření chová prediktivního regulátoru v závislosti na typu normy použité ve ztrátové funkci, na váhovém koeficientu a na délce horizontu predikce. Při výpočtu regulátoru jsme použili funkce pro lineární a kvadratické programování *linprog* a *quadprog* z optimalizačního toolboxu.

Simulace ukázaly, že použití l_1 normy vede na dead beat řízení. Pro normu l_p pro p blížící se k 2 získáme hladší průběh vstupní veličiny a řízení je méně „agresivní“. Délka horizontu optimalizace při l_1 řízení má vliv na celkový počet změn řídicí veličiny. Velikost váhového koeficientu r při l_1 řízení má vliv na celkovou dobu přechodového děje.

5. Poděkování

Tato práce byla částečně podpořena granty 102/01/H116 a 102/01/0021 Grantové agentury České republiky.

6. Kontaktní informace

Jaroslav Pekař	**Jan Štecha**	**Vladimír Havlena**
Katedra řídicí techniky	Katedra řídicí techniky	Honeywell Prague Laboratory
Fakulta elektrotechnická	Fakulta elektrotechnická	Honeywell Intl.
ČVUT v Praze	ČVUT v Praze	Pod vodárenskou věží 4
Karlovo náměstí 13,	Karlovo náměstí 13,	182 08 Praha
182 02 Praha	182 02 Praha	
e-mail:	e-mail:	e-mail:
pekarj@control.felk.cvut.cz	stecha@control.felk.cvut.cz	vladimir.havlena@htc.honeywell.cz

7. Literatura

[1] L. Ljung, System identification: *Theory for the User*. (Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.)

[2] K. J.Astrom , B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and design*, (Prentice Hall,Inc, Upper Saddle River, NJ, 1997).

[3] R. Findeisen, L. Imsland, F. Allgower, B.A. Foss, State and Output Feedback Nonlinear Model Predictive Control: An Overview, *European Journal of Control*, 9, (2003), 190-206.

[4] Christopher V. Rao, James B. Rawlings, Linear programming and model predictive control, *Journal of Process Control*, 10, 2000, 283-289.

[5] J.C. Allwright, G.C. Papavasiliou, On linear programming and robust model predictive control using impulse response, Sys. Cont. Let., 18, 1992, 159-164.

[6] H. Genceli, M. Nikolau, Robust stability analysis of constrained l1-norm model predictive control, AIChE J., 39 (12), 1993, 1954-1965.

[7] T.S. Change, D.E. Seborg, A linear programming approach for multivariable feedback control with inequality constraints, Int. J. Control, 37, 1983, 583-597.

[8] L.A. Zadeh, J.H. Whalen, On optimal control and linear programming, IRE Trans. Auto, Cont. 7, 1962, 45-46.

[9] A. Bjorck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, (Siam, Philadelphia, 1996).

[10] S.Van Huffel, J. Vandewalle, The Total Least Squares Problem. Computational Aspects and Analysis. Siam, Philadelphia, 1991.

[11] S. Boyd, L. Vandenberghe L., *Introduction to Convex Optimization with Engineering Applications* (Lesture notes, Stanford University, 2002).