METODA ADAPTIVNÍ BÁZE

Petr Byczanski

Středisko aplikované matematiky ÚGN AV ČR

Metoda adaptivní báze slouží pro opakované řešení soustav lineárních rovnic s toutéž neměnnou maticí a pomalu se měnícím vektorem pravé strany . Podstatou MAB je konstrukce ortonormální báze v prostoru pravých stran .

Aktuální pravá strana je buď dostatečně přesně vyjádřitelná pomocí této báze anebo musí být báze rozšířena o další bázový vektor . V prvém případě získáme požadované řešení s jistou konečnou přesností ihned na základě vzorů vektorů báze . V druhém případě musí být nejprve soustava skutečně vyřešena pro nový bázový vektor .

Hlavní úspora při použití MAB je , že skutečnou soustavu lineárních rovnic řešíme pouze "občas" , většinou pouze využíváme vzor báze .

Specifikace problému

Předmětem zájmu je opakované řešení soustavy lineárních rovnic

$$A \times x = y \tag{1}$$

s neměnnou regulární maticí A a s množinou "pozvolna se měnících" vektorů y .

Pro ilustraci spojité změny vektoru pravé strany si nejprve uvedeme konkrétní příklad . Uvažujme úlohu vedení tepla . Po prostorové diskretizaci dostaneme pro vektor T uzlových teplot rovnici

$$M0 \times T(t) + M1 \times T'(t) = V(t)$$

Po časové diskretizaci budeme mít

$$[M1 + \Delta t \cdot \vartheta \cdot M0] \times \Delta T = (V(t + \vartheta \cdot \Delta t) - M0 \times T) \cdot \Delta t$$

Při postupu s konstantním časovým krokem Δt dostáváme pro změny uzlových teplot ΔT soustavy lineárních rovnic s toutéž maticí a "pozvolna se měnící" pravou stranou .

Prakticky je matice A velmi rozsáhlá a řídká . Soustavy (1) se proto řeší iteračně . Obecnou snahou je při opakovaném řešení co nejvíce využít znalostí získaných v předchozích řešeních .

Při použití metody sdružených gradientů se většinou počáteční odhad řešení získává **nějak** vhodnou interpolací z předchozích výsledků . Dále se většinou tento odhad **nějak** zpřesňuje užitím množiny směrů {v} resp. reziduí {r} z předchozího nebo prvního řešení . Efektivnější využití {v} resp. {r} není možné , protože celý výpočetní proces metody sdružených gradientů je jednoznačně určen pouze prvnim reziduem r . Není tudíž obecně možné kontinuální pokračování .

Metoda adaptivní báze

Obecná snaha o co nejefektivnější využití znalostí získaných při předchozích řešeních mě dovedla k vytvoření vlastní velmi jednoduché metody adaptivní báze . Její podstatou je dynamická tvorba ortonormální báze v prostoru pravých stran . Tuto používáme pro vyjadřování jednotlivých vektorů y . Soustavu lineárních rovnic skutečně řešíme pouze při výskytu nové kolmé komponenty . Spolu s vektory báze si pamatujeme i odpovídající vzory . Nepoužívané prvky báze zapomínáme .

Před řešením soustav (1) jsou báze a její vzor prázdné . Během jednotlivých řešení (1) dochází ke zvětšování resp. přepisování báze a jejího vzoru . Jedno řešení soustavy (1) je samostatně znázorněné .

jedno řešení $A \times x = y$ metodou adaptivní báze

(a) $\eta \leftarrow y^T \times f$

(b) $g \leftarrow \dfrac{y - f \times \eta^T}{\| y - f \times \eta^T \|}$

(c) $\mu \leftarrow g^T \times f$

(d) $g \leftarrow \dfrac{g - f \times \mu^T}{\| g - f \times \mu^T \|}$

(e) $\kappa \leftarrow y^T \times g$

(f) $|\kappa| < \varepsilon \cdot \|y\|$

ano

(f1) $x \leftarrow e \times \eta^T$

ne

(f0a) vyřešení $A \times v = g$

(f0b) $x \leftarrow e \times \eta^T + v \cdot \kappa$

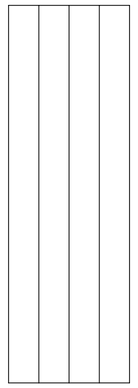
(f0c) nalezení $|\eta_j| \leq \min\limits_{1 \leq k \leq p} |\eta_k|$

(f0d) $|\eta_j| < \dfrac{\varepsilon}{10} \cdot \|y\|$

(f0d1) ano $e_{:,j} \leftarrow v$ $f_{:,j} \leftarrow g$

(f0d0) ne $e_{:,p+1} \leftarrow v$ $f_{:,p+1} \leftarrow g$ $p \leftarrow p+1$

1 2 p



$f_{:,1..p}$ $f^T \times f = 1$

ortonormální báze

$e_{:,1..p}$ $A \times e = f$

odpovídající vzory

Vektory zmiňované báze jsou seskupeny do obdélníkové matice f, odpovídající vzory tvoří matici e.

V kroku (a) spočteme koeficienty ortogonální projekce aktuální pravé strany y do lineáního podprostoru generovaného bázi f. V kroku (b) je vytvořen další bázový vektor takový, že při rozšíření stávající báze o něj bude y plně vyjádřitelné.

Protože se ale vstupující vektory y budou "měnit pouze pozvolna", budou y a $f \times \eta^T$ velmi blízké. Jejich rozdíl bude obecně zatížen velkou numerickou chybou. Proto je v krocích (c) a (d) provedeno zpřesnění nového potenciálního bázového vektoru g ve smyslu dodržení kolmosti vůči f.

V kroku (e) je určena složka y do nového bázového směru. V kroku (f) je prováděno rozhodnutí, zdali je tato kolmá komponenta podstatná?

V případě, že stávající báze postačuje k dostatečně přesnému vyjádření aktuálního y, jsme hotovi. Krok (f1) vytváří odpovîdající řešení bez řešení soustavy lineárních rovnic s maticí A!

Naproti tomu v případě nezanedbatelnosti kolmé komponenty $g \cdot \kappa$ musíme nejprve doopravdy vyřešit soustavu lineárních rovnic s maticí A a pravou stranou g ; krok (f0a) . Řešení zadané soustavy (1) je poté vytvořeno v kroku (f0b) . Zbývající kroky se zabývají otázkou kde uschovat novou dvojici $v \sim g$?

V kroku (f0c) nalezneme kandidáta na odstranění ze stávající báze . V kroku (f0d) rozhodujeme , zdali je tento kandidát ještě podstatný či nikoliv . Je-li nepodstatný , přepíšeme jej novým prvkem ; krok (f0d1) . V opačném případě musíme pamatovanou bázi o jeden prvek rozšířit ; krok (f0d0) .

Logická konzistence schématu MAB vyžaduje , aby přesnost v kroku (f0d) byla nejvýše rovna přesnosti použité v kroku (f) . V limitní shodě by mohlo dojít k nechtěnému opakovanému řešení pro bázový směr vypuštěný bezprostředně předtím . Žádoucí je tedy dodržení nerovnosti , v kroku (f0d) je proto $\varepsilon/10$.

Skutečné vyřešení soustavy lineárních rovnic s maticí A v kroku (f0a) nemusí být provedeno zcela přesně . Postačuje iterační řešení s konečnou přesností , která může být nejvýše rovna přesnosti použité v kroku (f) . Lepší je volit něco menšího , např.

$$\| A \times v - g \| < \varepsilon/4$$

Částečné zhodnocení

Časovou úsporu při použití metody adaptivní báze dosahujeme tím , že skutečnou soustavu lineárních rovnic s maticí A řešíme pouze"občas" , pouze když pravá strana "vyjede" z lineárního podprostoru generovaného aktuální bázi .

Za tuto úsporu "platíme" tím , že si pamatujeme část ortonormální báze v y-prostoru a odpovídající vzory v x-prostoru . Paměťovou náročnost snižujeme zapomínáním již nepotřebných prvků .

Jistou prvotní představu o chování MAB daly konkrétní testovací výpočty provedené na diferenciální rovnici uvedené na začátku . Konkrétní dimenze byla 387 , použité ε bylo 0.001 a 0.0001 . Celkový počet řešení (f0a) byl zhruba v rozmezí 1/100 až 2/100 celkového počtu (1) . Maximální počet pamatovaných prvků báze se pohyboval v rozmezí 1/5 až 2/5 dimenze vektorového prostoru .

Práce byla podporována grantem GAČR 105/02/0492

adresa : *mgr. Petr Byczanski*
Ústav geoniky AV ČR
Studentská 1768
708 00 OSTRAVA
E-adresa : petr.byczanski@ugn.cas.cz