MODELOVANIE A SIMULÁCIA MECHANICKÝCH SYSTÉMOV V PROGRAMOVOM BALÍKU MATLAB

Ing. Róbert Bartko[1]*, Ing. Peter Čelko*[2]

Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne

Úvod

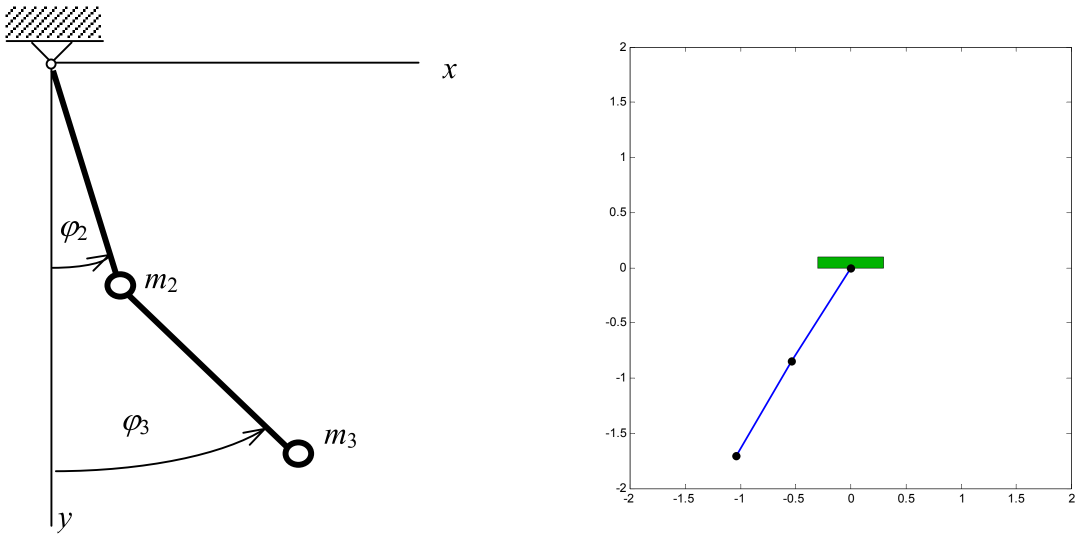
V dynamike viazaných telies sa stretávame s problémami, kde matematický model vedie na sústavy nelineárnych diferenciálnych rovníc alebo diferenciálno-algebraických rovníc. V článku si ukážeme na príklade dvojitého matematického kyvadla (rovinný RR mechanizmus) tri prístupy, ktoré nám programový balík MATLAB pri riešení takýchto problémov poskytuje.

Matematický model

Uvažujme dvojité matematické kyvadla podľa Obr. 1. Dané sú m_2, m_3, l_2, l_3 a g. Odvoďme pohybové rovnice pomocou Lagrangeových rovníc II. druhu [1]. Sústava má dva stupne voľnosti. Za zovšeobecnené súradnice zvolím φ_2, φ_3. Kinetická a potenciálna energia sústavy

$$T = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \left[l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + l_3^2 \dot{\varphi}_3^2 + 2 l_2 l_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \right] \tag{1}$$

$$V = m_2 g l_2 (1 - \cos(\varphi_2)) + m_3 g \left[l_2 (1 - \cos(\varphi_2)) + l_3 (1 - \cos(\varphi_3)) \right] \tag{2}$$



Obr. 1 Dvojité matematické kyvadlo

Vytvoríme Lagrangián

$$\begin{aligned} L = T - V = {} & \frac{1}{2}(m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \dot{\varphi}_3^2 + m_3 l_2 l_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \\ & - (m_2 + m_3) g l_2 [1 - \cos(\varphi_2)] + m_3 g l_3 [1 - \cos(\varphi_3)] \end{aligned} \tag{3}$$

a po vypočítame jednotlivých členov Lagrangeových rovníc II. druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_{nepot.\, i} \qquad i = 1,2 \tag{4}$$

kde D je disipačná funkcia a $Q_{nepot.\,i}$ sú nepotenciálové sily (pre tento prípad nulové). Dostávame dve pohybové rovnice

$$(m_2+m_3)l_2^2\ddot{\varphi}_2+m_3l_2l_3\left[\ddot{\varphi}_3\mathrm{c}(\varphi_3-\varphi_2)-\dot{\varphi}_3^2\mathrm{s}(\varphi_3-\varphi_2)\right]+(m_2+m_3)gl_2\mathrm{s}(\varphi_2)=0$$

$$m_3l_3^2\ddot{\varphi}_3+m_3l_2l_3\left[\ddot{\varphi}_2\mathrm{c}(\varphi_3-\varphi_2)+\dot{\varphi}_2^2\mathrm{s}(\varphi_3-\varphi_2)\right]+m_3gl_3\mathrm{s}(\varphi_3)=0 \tag{5}$$

Pohybové rovnice sú tvorené sústavou dvoch nelineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu, ktoré prevedieme pomocou nasledujúcej substitúcii

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_2\\\dot{\varphi}_3\\\varphi_2\\\varphi_3\end{bmatrix} \tag{6}$$

na sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu v tvare

$$\mathbf{M}\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{y},t) \tag{7}$$

kde matica $\mathbf{M}$ 4x4 na ľavej strane je v tvare

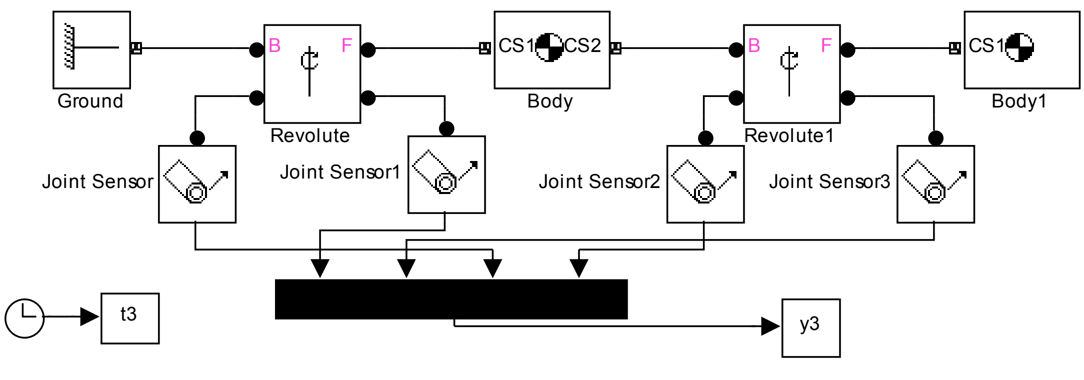
$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}(m_2+m_3)l_2^2 & m_3l_2l_3\mathrm{c}(y_4-y_3) & 0 & 0\\ m_3l_2l_3\mathrm{c}(y_4-y_3) & m_3l_3^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{8}$$

a matica $\mathbf{f}(\mathbf{y},t)$ 4x1 na pravej strane

$$\mathbf{f}(\mathbf{y},t)=\begin{bmatrix}m_3l_2l_3y_2^2\mathrm{s}(y_4-y_3)-(m_2+m_3)gl_2\mathrm{s}(y_3)\\ -m_3l_2l_3y_1^2\mathrm{s}(y_4-y_3)-m_3gl_3\mathrm{s}(y_4)\\ y_1\\ y_2\end{bmatrix} \tag{9}$$

Riešenie v MATLABe

Prvý spôsob riešenia v MATLABe urobíme pomocou m-súboru typ funkcia, v ktorom zapíšeme pomocou dvoch funkcií sústavu rovníc v tvare (7)-(9). Využijeme riešenie sústavy diferenciálnych rovníc a vytvoríme jednoduchú animáciu. Riešenie je uvedené v Tab. 1. Pri riešení si je treba uvedomiť, že matica $\mathbf{M}$ nie je konštantná matica, mení sa s časom.

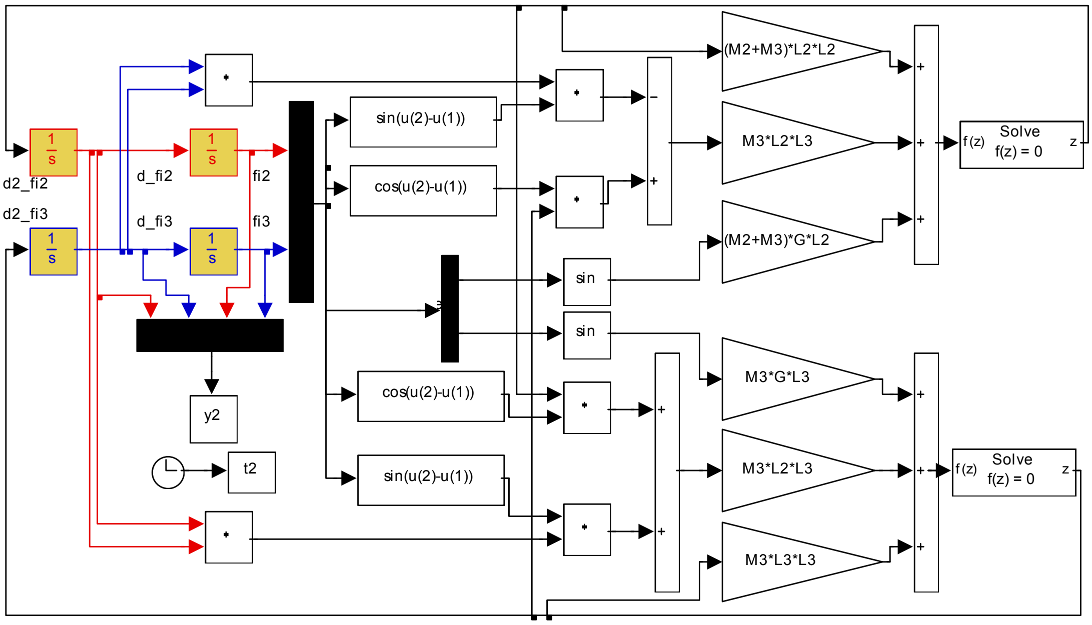


Obr. 2 Model v SimMechanics - 3. riešenie

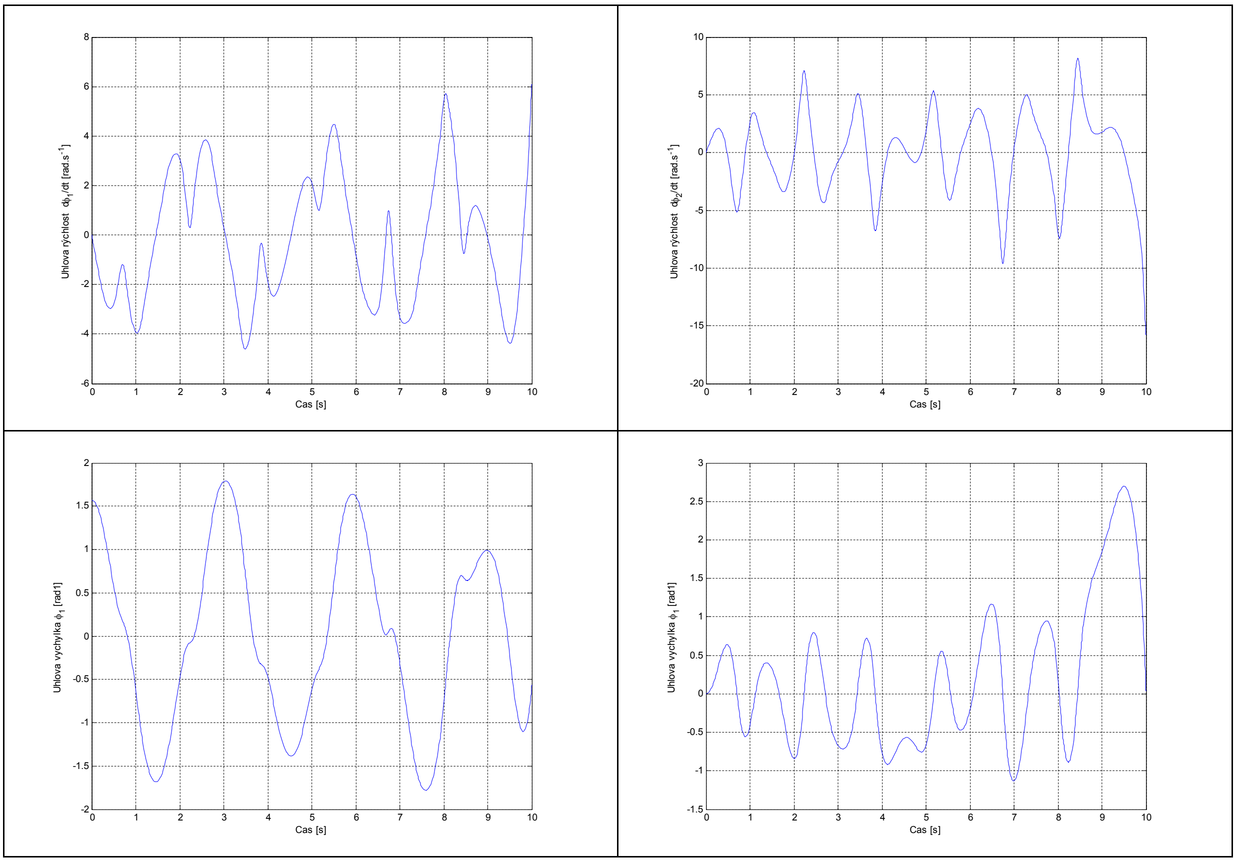
Druhý spôsob riešenia je pomocou zapísania sústavy 2 nelineárnych diferenciálnych rovníc v tvare (5) pomocou SIMULINKu. Na Obr. 3 je ukázaný model s uvažovaním vzniknutej algebraickej slučky.
Tretí spôsob je využitie toolboxu SimMechanics, v ktorom vytvoríme model štruktúry sústavy a MATLAB za nás zostavuje a rieši sústavu diferenciálnych rovníc. Ukážka modelu je na Obr. 2.

```
function [t,y1,y]=kyvadlo_2
%
clf
global M2 M3 L2 L3 G
G  = 9.81; L2 = 1; L3 = 1; M2 = 2; M3 = 2;
tspan = [0 10]; y0 = [0;0;pi/2;pi/2];
options = odeset('Mass',@mass,'AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-5);
[t,y] = ode113(@rov_kyv_2a,tspan,y0,options);
[m,n]=size(t);
for i=1:m
    y1(i,1) = y(i,1);
    y1(i,2) = y(i,2)-y(i,1);
    y1(i,3) = y(i,3)-pi/2;
    if y1(i,3)>pi;  y1(i,3) = y1(i,3)-2*pi; end
    if y1(i,3)<-pi; y1(i,3) = y1(i,3)+2*pi; end
    y1(i,4) = y(i,4)-y(i,3);
    if y1(i,4)>pi;  y1(i,4) = y1(i,4)-2*pi; end
    if y1(i,4)<-pi; y1(i,4) = y1(i,4)+2*pi; end
end
%
xA = L2*sin(y(1,3));    yA = L2*cos(y(1,3));
xB = xA+L3*sin(y(1,4)); yB = yA+L3*cos(y(1,4));
X  = [0 xA xB];         Y  = [0 -yA -yB];
p  = plot(X,Y,X,Y,'.','EraseMode','none','MarkerSize',18,...
     'MarkerEdgeColor','k','EraseMode','xor','LineWidth',2);
patch([-.3 .3 .3 -.3],[0 0 .1 .1],[0 0.7 0])
axis equal; axis([-2 2 -2 2]);
hold on
for i=2:m
    xA = L2*sin(y(i,3));     yA = L2*cos(y(i,3));
    xB = xA+L3*sin(y(i,4));  yB = yA+L3*cos(y(i,4));
    X  = [0 xA xB];          Y  = [0 -yA -yB];
    set(p,'XData',X,'YData',Y)
    drawnow;    pause(.05)
end
%=================================================================
function dydt=rov_kyv_2a(t,y)
global M2 M3 L2 L3 G
dydt= [ M3*L2*L3*(y(2)^2).*sin(y(4)-y(3))-(M2+M3)*G*L2*sin(y(3));...
       -M3*L2*L3*(y(1)^2).*sin(y(4)-y(3))-M3*G*L3*sin(y(4));...
        y(1);...
        y(2)];
%=================================================================
function M=mass(t,y)
global M2 M3 L2 L3 G
M = eye(4);
M(1,1) = (M2+M3)*L2^2;            M(1,2) = M3*L2*L3*cos(y(4)-y(3));
M(2,1) = M3*L2*L3*cos(y(4)-y(3)); M(2,2) = M3*L3^2;
```

Tab. 1 Model v MATLABe, M-súbor – 1. riešenie



Obr. 3 Model v SIMULINKu – 2. riešenie



Obr. 4 Priebeh uhlovej rýchlosti a uhlovej výchylky relatívnych kinematických veličín

Výsledky

Prvý prístup je t.j. vytvorenie M-súboru, v ktorom zapíšeme matematický model v tvare sústavy nelineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu je náročný na matematickú prípravu rovníc – zníženie rádu z *n*-diferenciálnych rovníc 2. rádu na 2*n*-diferenciálnych rovníc 1. rádu. Rovnako je aj problém, ak potrebujeme z modelu dostať ďalšie veličiny, okrem

zovšeobecnených súradníc. Pri modely v SIMULINKu pracujeme so sústavou *n*-diferenciálnych rovníc 2. rádu, ale musíme vyriešiť problém vzniknutých algebraických slučiek, aby bola sústava riešiteľná. Nie je problém získať z vytvoreného modelu ďalšie veličiny. Najväčší komfort poskytuje užívateľovi toolbox SimMechanics, v ktorom zadáva užívateľ len štruktúru modelu a vyberie riešenie tejto priamej kinematickej úlohy. Menšou nevýhodou je, že musí poznať presne syntax zadávania modelu.
Na Obr. 4 sú na ukážku porovnané výsledky zo všetkých troch vzniknutých modelov. Keďže modely v MATLABe vznikli na základe jedného matematicko-fyzikálneho modelu, výsledky kinematické veličiny uhlová rýchlosť a uhlová výchylka sú pre všetky tri modely rovnaké.

Záver

V článku je na troch modeloch vytvorených v programovom balíku MATLAB demonštrovaný prístup k modelovaniu mechanických systémov, ktorý tento balík poskytuje. Každý prístup má svoje výhody a aj nevýhody, a záleží na užívateľovi, ktorý prístup je pre danú situáciu výhodnejší a využije ho.

Zoznam použitej literatúry

[1] - BRDIČKA, M., HLADÍK, A.: Teoretická mechanika. Academia, nakladatelstvo Československej akadémie vied, Praha, 1987.

---

[1] KFIM Fakulta priemyselných technológií TnU AD, T. Vansovej 1054/45, 020 32 Puchov, e-mail: bartko@tnuni.sk

[2] KM Fakulta špeciálnej techniky TnU AD, Študentská 2, 911 50 Trenčín, e-mail: celko@tnuni.sk