IDENTIFIKÁCIA MODÁLNYCH PARAMETROV MECHATRONICKÉHO SYSTÉMU

Ing. Róbert Bartko[1]

Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne

Úvod

Ak potrebujeme matematický model reálnej sústavy verifikovať t.j. overiť jeho správnosť alebo ak chceme matematický model spresniť, musíme identifikovať parametre modelu a to na základe meraní na reálnom objekte. Pri identifikácii dynamického systému sa môžeme zaoberať hľadaním parametrov lineárnej diferenčnej rovnice (ARX modely), parametrov stavovo-výstupného modelu alebo parametrov prenosovej funkcii. Pri identifikácií parametrov dynamického systému v mechanike niekedy hľadáme modálne parametre – vlastné frekvencie, pomerné tlmenie, vlastné tvary a zovšeobecnené hmotnosti.
V druhej polovici 80-tych rokov začal rozvoj identifikačných metód v časovej oblasti. Tieto metódy sa rozvíjali na základe riešenia problémov s identifikáciou sústav, ktoré mali nízke vlastné frekvencie, viacnásobné vlastné frekvencie alebo boli tieto sústavy riadené. Medzi najznámejšie metódy patrí ERA metóda [1] a jej modifikácie.

Matematická formulácia ERA metódy

Majme diskrétny lineárny riadený systém s n stupňami voľnosti, s m riadenými vstupmi a p meranými výstupmi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \qquad & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k), & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{c}_p^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

kde **A** je nxn, **B** nxm, **C** pxn matica, **x** nx1, **u** mx1 a **y** px1 stĺpcová matica. V stavovej matici **A** sú vložené hmotné, tlmiace a elastické vlastnosti konštrukcie. Našou úlohou je nájsť z nameraných dát trojicu matíc

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{2}$$

tak, že namerané hodnoty sú reprodukovateľné stavovo-výstupnými rovnicami (1) a matica **A** má minimálny rád. Ak je **T** ľubovolná nesingulárna matica, potom aj trojica matíc

$$\begin{bmatrix} \mathbf{TAT}^{-1} & \mathbf{TB} & \mathbf{CT}^{-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

je tiež správny model, len s transformovanými súradnicami. Avšak modálne vlastnosti sústavy sa po transformácii nemenia.
Existujú dve špeciálne riešenia rovnice (1), známe ako Markovove parametre. Odozva na jednotkový impulz k-tom časovom kroku

$$y_{ji}(k) = \mathbf{c}_j \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,p \quad k = 1,2,\ldots \tag{4}$$

a na počiatočné podmienky

$$y_{ji}(k) = \mathbf{c}_j \mathbf{A}^{k} \mathbf{x}_i(0), \qquad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,p \quad k = 1,2,\ldots \tag{5}$$

kde $\mathbf{x}_i(0)$ sú i-te počiatočné podmienky. Vytvorme blokovú Hankelovu maticu

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(s_0 + k + t_0) & \ldots & \mathbf{Y}(s_0 + k + t_{\eta-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}(s_{\mu-1} + k + t_0) & \ldots & \mathbf{Y}(s_{\mu-1} + k + t_{\eta-1}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

kde $s_j,\ j = 0,1,\ldots,\mu-1$ a $t_i,\ i = 0,1,\ldots,\eta-1$ sú pomocné prirodzené čísla. Ak urobíme singulárny rozklad Hankelovej matice pre k=0 dostávame

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{P}_N \mathbf{D}_N \mathbf{Q}_N^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

kde $\mathbf{P}_N$, $\mathbf{Q}_N$ sú ortogonálne matice a $\mathbf{D}_N$ je diagonálna matica singulárnych čísel. Singulárne čísla sa používajú ako jeden z možných spôsobov oddelenia „šumových“ vlastných frekvencií od *n* vlastných frekvencií sústavy

$$\mathbf{D}_N = diag\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_n & d_{n+1} & \ldots & d_N \end{bmatrix}, \text{ kde } d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n \le \ldots \le d_N \tag{8}$$

Po redukovaní rádu sústavy [1] dostávame hľadané matice v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \mathbf{D}_n^{-1/2}\mathbf{P}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(k)\mathbf{Q}_n\mathbf{D}_n^{-1/2} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{D}_n^{1/2}\mathbf{Q}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_{m1} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{E}_{p1}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_n\mathbf{D}_n^{1/2} \end{aligned} \tag{9}$$

kde matice

$$\mathbf{E}_{m1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m,m} & \ldots & \mathbf{0}_{m,m} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{E}_{p1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_{p,p} & \ldots & \mathbf{0}_{p,p} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$\mathbf{I}_m$ je *m*x*m* jednotková diagonálna matica a $\mathbf{0}_{p,p}$ je *p*x*p* nulová matica. Po skrátení počtu singulárnych čísel z *N* na *n*, môžeme riešiť problém vlastných čísel v tvare

$$\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{\Psi} = \mathbf{Z}^k \tag{11}$$

Vlastné frekvencie a pomerné tlmenie dostaneme z vlastných čísel jednoduchou transformáciou

$$\mathbf{s} = \left[\ln\left(diag(\mathbf{Z})\right) \pm i2j\pi\right] / (k\,\Delta\tau), \qquad i = \sqrt{-1} \tag{12}$$

j je prirodzené číslo a *k* sa zvyčajne volí 1. Druhý spôsob odlíšenia „šumových“ vlastných frekvencií je pomocou MAC kritéria, ktorý je definované [1]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \ldots & \mathbf{q}_i & \ldots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}^* = \boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_N^{1/2}\mathbf{Q}_N^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^* = \begin{bmatrix} 1 & z_i^{t_1\Delta\tau} & \ldots & z_i^{t_{s-1}\Delta\tau} \end{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{14}$$

$$\gamma_i = \frac{\left|\tilde{\mathbf{q}}_i^*\mathbf{q}_i\right|}{\sqrt{\left(\mathbf{q}_i^*\mathbf{q}_i\right)\left(\tilde{\mathbf{q}}_i^*\tilde{\mathbf{q}}_i\right)}}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{15}$$

Parameter γ_i nadobúda hodnoty medzi 0 až 1. Čím viac sa blíži k jednotke, tým bližšie je vypočítaný vlastný tvar ku skutočnej hodnote.

Výpočet v MATLABe

V programe MATLAB bola vytvorená funkcia na identifikáciu systému t.j. zistenie matíc **A**, **B**, **C** minimálnej realizácie a z nich vlastných frekvencií, pomerných tlmení a vlastných tvarov kmitajúcej sústavy z voľnej odozvy sústavy. Časť programu je uvedená v Tab.1.

V programe SIMULINK bol vytvorený simulačný experiment. Vytvorili sme priestorový model automobilu, ktorého modálne vlastnosti sme chceli identifikovať a overiť s jeho „známymi“ presnými hodnotami.

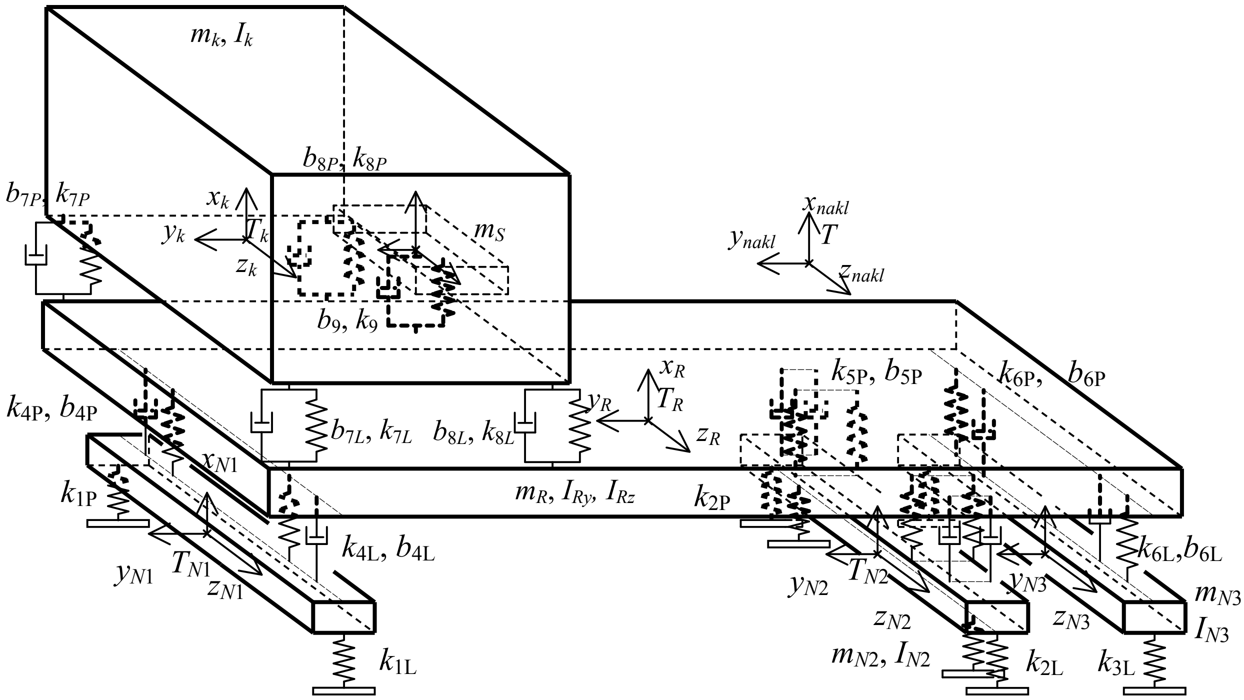
Priestorový model nákladného automobilu bol vytvorený zjednodušením a zanedbaním nepodstatných vlastností, ktoré nám neovplyvňujú nami sledované veličiny (Obr.1). Zanedbali sme pri tvorbe modelu elastické vlastnosti rámu - považovali sme ho za dokonale tuhý a pneumatiku sme nahradili modelom lineárneho elastického člena - pružiny. Pri modeli pneumatiky sme zanedbali tlmenie pneumatiky a model popisuje jednobodový kontakt pneumatiky s vozovkou.

Priestorový model nákladného automobilu má 13 stupňov voľnosti (DOF) a je tvorený sústavou 13 lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu alebo v stavovom zápise sústavou 26 lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu [3].

Matematický lineárny model nákladného automobilu s 13 stupňami voľnosti bol vytvorený v programe Matlab/Simulink (Obr.2). Za výstupné (merané) veličiny sme v simulácií zvolili 13 miest - po 2 miesta na každej náprave (majú po 2 DOF), po 3 miesta rám a kabína (majú po 3 DOF) a jedno meracie miesto bola sedačka šoféra (má 1 DOF). Ako výstup bolo vo všetkých miestach merané zrýchlenie v smere osi *x*-ovej.

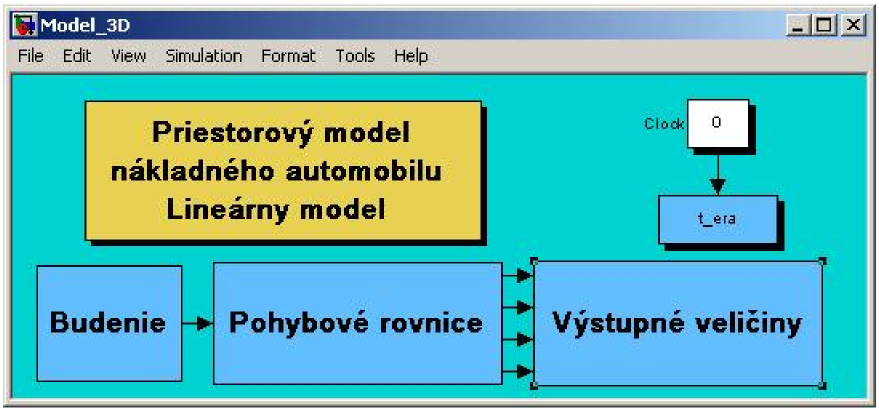
Tab.1 Časť programu na identifikáciu modelu pomocou ERA metódy

```
...
%   Vytvorili sme Hankelovu maticu a
%   urobili jej singularny rozklad:
%
[p,xs,q]=svd(H(:,1:(nr-1)*r));
xs=diag(xs);
disp(['Maximalne singularne cislo (SC) = ' sprintf('%e',max(xs))])
disp(['Minimalne singularne cislo (SC) = ' sprintf('%e',min(xs))])
%
%   Urcime rad systemu:
%
if flagera==0;
    semilogy([xs],'*');
    xlabel(' Cislo');ylabel('Absolutna hodnota SC');
    title(' SC Hankelovej matici');pause;
end;
n=input('Zadanie radu modelu =: ');
%
% Vypocitanie matic A, B, C minimalnej realizacie systemu
%
d1=sqrt(xs(1:n)); d2=1.0 ./d1;
a=diag(d2)*p(:,1:n)'*H(:,r+1:nr*r)*q(:,1:n)*diag(d2);
b=diag(d1)*q(1:r,1:n)';
c=p(1:m,1:n)*diag(d1);
%
%  Zoradenie vlastnych cisel a vlastnych vektorov
%
[g,xf]=eig(a);
[lambda,index]=sort(diag(xf)); clear xf; g=g(:,index);
%
%   Vypocet MAC koeficientov
%
mac=zeros(n,2);
[mac(:,1),cq]=@svpm(lambda,g\b,c*g,nm);
rq=p(:,1:n)*diag(d1)*g;clear g;
mac(:,2)=abs(diag(rq'*cq) ./sqrt(diag(rq'*rq) .*diag(cq'*cq)));
xt=deg2hz(lambda,dt);
disp('   Tlmenie(%)   Frekv.(HZ)  Sing. cislo          MAC')
disp([xt(:,1:2) mac])
...
function [svm,obsvm] = svpm(lambda,bm,cm,n_markov)
%
n=length(lambda); c0=cm; obsvm=c0;
if n_markov > 1;
    for j=2:n_markov;
        c0=c0*diag(lambda); obsvm=[obsvm;c0];
    end;
end;
svm=zeros(n,1);
for j=1:n;
    svm(j)=sqrt([bm(j,:)*bm(j,:)']*[cm(:,j)'*cm(:,j)])/...
           abs(1-abs(lambda(j)));
end;
svm=svm ./max(svm);
```

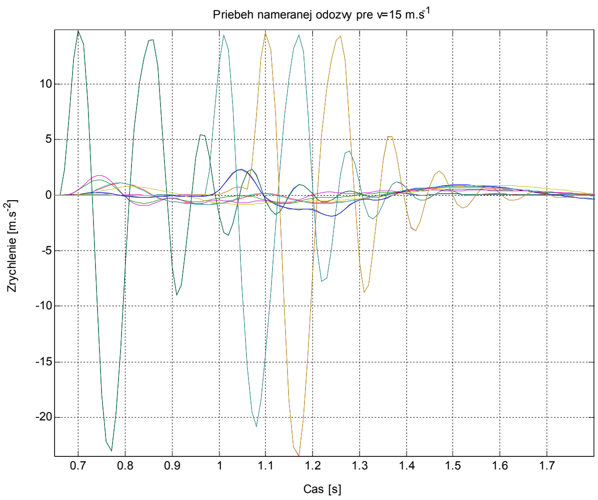


Obr.1 Zjednodušený priestorový model nákladného automobilu

Na simuláciu vybudenia odozvy sme ako vstup zvolili prechod automobilu cez prekážku v tvare časti sínusovky, ktorý automobil prešiel tromi rôznymi rýchlosťami 15m.s^{-1}, 20m.s^{-1} a 25m.s^{-1}. Matematický model je podrobnejšie rozobraný v literatúre [2] a [3].

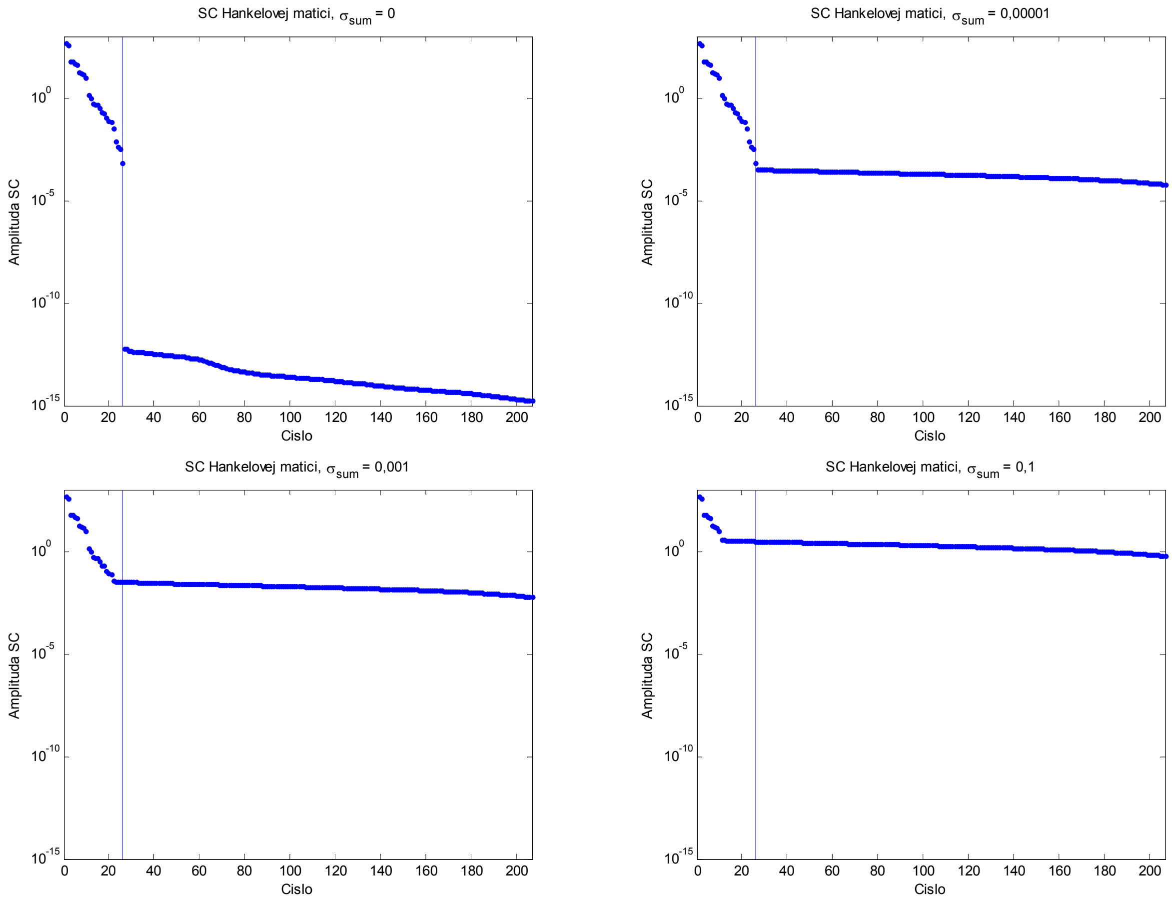


Obr.2 Matematický model nákladného automobilu prepísaný v Simulinku



Obr.3 Priebeh zrýchlenia pre 13 meracích miest bez šumu, rýchlosť 15 m.s^{-1}

Simulácia bol vykonaná pomocou jednokrokového riešiča Runge-Kutta (4,5) s dĺžkou simulácie 20s. Výstup v 13 meracích miestach bol uložený so vzorkovacou frekvenciou 100Hz.
Na Obr.3 je uvedený priebeh zrýchlenia pre všetkých trinásť meracích miest. Aby sme vedeli porovnať identifikovaný model a simulačný model, sú v Tab.2 uvedené vlastné frekvencie (VF) a pomerné tlmenia (PT) simulačného modelu. Všetky vlastné čísla sú v dvojiciach ako komplexne združené čísla a preto sú VF a PT z nich vypočítané, uvedené v Tab.2 vždy z dvojice len jedna hodnota.
K „nameraným“ výstupom sme pridali šum, ktorý bol generovaný pomocou generátora náhodných čísel ako biely šum s nulovou strednou hodnotou a rôznym rozptylom. Na Obr.4 je ukázaný vplyv veľkosti šumu na priebeh singulárnych čísel. Rád sústavy t.j. počet identifikovaných vlastných tvarov sa prejaví skokovou zmenou v amplitúde singulárnych čísel. Vidíme, že ak je šum spôsobený len presnosťou výpočtu, rád systému je jednoznačne daný singulárnymi číslami. Ale pri zväčšovaní šumu sa postupne rád sústavy „stráca“ šumovými singulárnymi číslami. Zvislou čiarou sme zobrazili skutočný rád sústavy 26.



Obr.4 Vplyv veľkosti šumu na singulárne čísla Hankelovej matice

V Tab.2 sú porovnané presné vlastné čísla a pomerné tlmenia a identifikované vlastné čísla, pomerné tlmenia MAC koeficienty pre nulový šum a šum s rozptylom 0,001. Pri identifikácií bol použitý rozmer Hankelovej matice 390x207.
Pri šume s rozptylom 0,001 vidíme, že sme neidentifikovali 11. vlastný tvar a pri 2., 12. a 13. vlastnom tvare sa objavujú chyby v presnosti identifikácie. „Šumový“ vlastný tvar je odlíšený nízkym MAC koeficientom, ktorý je 0,45 a na nepresnosti pri identifikácii ukazujú aj pri 2., 12. a 13. vlastnom tvare nižšie hodnoty MAC koeficientov.

Tab.2 Vlastné frekvencie a pomerné tlmenie modelu

	Presné hodnoty		$\sigma_{sum} = 0$			$\sigma_{sum} = 0{,}001$		
Číslo VF	VF [Hz]	PT [%]	VF [Hz]	PT [%]	MAC	VF [Hz]	PT [%]	MAC
1	0.8315	11.7451	0.83	11.74	1.00	0.90	7.55	1.00
2	0,8966	7,3400	0,90	7,34	1,00	0,91	81,19	0,97
3	1,4511	19,7168	1,45	19,72	1,00	1,45	19,68	1,00
4	1,5981	46,9663	1,60	46,97	1,00	1,65	48,30	1,00
5	2,9102	43,4316	2,91	43,43	1,00	2,92	44,07	1,00
6	9,2072	3,5111	9,21	3,51	1,00	9,20	3,58	1,00
7	9,6797	14,0802	9,68	14,08	1,00	9,68	14,08	1,00
8	9,6856	15,0301	9,69	15,03	1,00	9,69	15,03	1,00
9	9,8878	20,3471	9,89	20,35	1,00	9,89	20,35	1,00
10	9,9799	4,0346	9,98	4,04	1,00	10,02	4,01	1,00
11	10,6170	33,2182	10,62	33,22	1,00	-	-	-
12	11,6618	8,8515	11,66	8,86	1,00	11,73	9,36	0,98
13	23,3013	67,5561	23,14	67,11	1,00	25,81	1,09	0,81
-	-	-	-	-	-	50.12	6.93	0.45

Záver

V článku sme ukázali možnosť identifikácie modálnych parametrov dynamického modelu pomocou ERA metódy. Na simulačnom experimente – priestorový model nákladného automobilu sme ukázali použitie ERA metódy, vplyv šumu na určenie rádu sústavy pomocou singulárnych čísel a zároveň rozoznania „šumových“ vlastných tvarov od „pravých“ vlastných tvarov pomocou MAC koeficientov. Zároveň bolo ukázané, že vplyvom šumu v nameranom signále nemusíme nájsť všetky modálne parametre sústavy – vlastné frekvencie a vlastné tvary.

Zoznam použitej literatúry

[1] Juang, J.-N. a Pappa, R.S.: “An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for Modal Parameter Identification and Model Reduction, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, 1985, pp. 620-627.

[2] Bartko, R.: Modeling of Truck for Semi-active Suspension Design, Dynamics of Machine Aggregates, Proceedings of 4th International Conference, Gabčíkovo, 1998.

[3] Fraňo, P.: Dynamický model nákladného automobilu, Diplomová práca, FŠT Trenčianska univerzita, Trenčín, 2002.

[1] KFIM Fakulta priemyselných technológií TnU AD, T. Vansovej 1054/45, 020 32 Puchov, e-mail: bartko@tnuni.sk