ŘEŠENÍ SYMBOLICKÝCH POLYNOMIÁLNÍCH ROVNIC[1]

Adéla Klimentová, Ing. Michael Šebek, DrSc.

Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Lineární polynomiální rovnice se často vyskytují v problémech návrhu řízení. Algebraické metody řízení vycházejí z vnějšího popisu systémů a chápou jej jako algebraický objekt. Algebraické metody se používají k řešení problému řízení diskrétních systémů jako například časově optimální nebo kvadraticky optimální řízení. Tyto problémy vedou na lineární zákon řízení a řešení lineárních polynomiálních rovnic. Většinou se řeší numericky, ale existují případy, kdy preferujeme symbolické řešení. Například v robustním řízení pokud jsou některé parametry neurčité. Potom je nutné řešit polynomiální rovnice se symbolickými koeficienty. K tomu byly s použitím symbolického a polynomiálního toolboxu vytvořeny odpovídající funkce popsané níže.

1. ÚVOD

Lineární polynomiální rovnice se vyskytují při syntéze řízení. V literatuře se takové rovnice nazývají diofantické. Základní diofantická rovnice má tvar

$$A(p)X(p)+B(p)Y(p)=C(p) \tag{1}$$

kde A, B a C jsou zadané polynomiální rovnice s proměnnou p, zatímco X a Y jsou neznámé polynomiální matice. Dále jsme pracovali s rovnicí $XA+YB=C$. Obě rovnice mohou být přepsány do obecného tvaru

$$X(p)A(p)=B(p) \tag{2}$$

Algebraické metody řízení popsané v [1] vycházejí z vnějšího popisu systému a chápou jej jako algebraický objekt. Výsledky návrhu řízení jsou pak závislé na řešení různých typů algebraických rovnic. Nejprve byly algebraické metody použity k řešení úloh diskrétního řízení systémů s jedním vstupem a jedním výstupem a také systémů mnoharozměrových. Jako příklad můžeme uvést problémy časově optimálního nebo kvadraticky optimálního řízení diskrétních systémů s jedním vstupem a jedním výstupem.

2. METODA ŘEŠENÍ

Výše uvedené problémy se většinou řeší numericky. V některých oblastech však preferujeme symbolické řešení. Například v robustním řízení, pokud jsou některé parametry neurčité. V těchto případech je vhodné použít vytvořené funkce, které umožňují symbolické řešení.

[1] Tato práce byla podpořena Ministerstvem školství České republiky v rámci projektu číslo LN00B096.

Numerické řešení založené na pokročilých polynomiálních metodách je k dispozici v Polynomial Toolboxu [2]. V něm jsou implementovány rychlé a spolehlivé originální algoritmy. Některé z jeho více než dvou set M-filů v Matlab kóku se zabývají také numerickým řešením diofantických rovnic. Polynomial Toolbox obsahuje mnoho převodních funkcí, které umožňují spolupráci s Control Systém Toolboxem a Symbolic Math Toolboxem. Funkce k řešení polynomiálních rovnic jak numericky tak symbolicky jsou dostupné ve veřejné doméně www.polyx.com.

Cílem této práce bylo najít metodu k řešení symbolických diofantických rovnic, implementovat ji v Matlabu a ověřit její funkčnost.
Polynomiální rovnice se typicky řeší pomocí Euklidova algoritmu nebo metodou neurčitých koeficientů. My jsme se rozhodli použít metodu Sylvesterovu.

Matice v (2) můžeme přepsat do tvaru

$$A(p) = A_0 + pA_1 + \ldots + p^{dA} A_{dA}$$

$$B(p) = B_0 + pB_1 + \ldots + p^{dB} B_{dB}$$

$$X(p) = X_0 + pX_1 + \ldots + p^{dX} X_{dX}$$

kde A je zadaná polynomiální matice velikosti m×n a stupně d_A=deg$A(p)$ a B je zadaná polynomiální matice velikosti m×l stupně d_B=deg$B(p)$ v proměnné p. X je neznámá matice velikosti n×l stupně d_X=deg$X(p)$, kterou hledáme.
Sylvesterova metoda je založena na vytvoření Sylvesterovy matice S, která má $(d_A+ d_X+1)m$ řádků a $(d_X+1)n$ sloupců. K tomu byla napsána funkce *smsylv*, která sestaví příslušnou matici. Dále se řeší lineární systém

$$S\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{dX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{dB} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Velikost Sylvesterovy matice je silně závislá na stupni d_X , jehož spodní a horní hranice lze podle [3] stanovit předem. Řešení potom hledáme zvyšováním očekávaného stupně od spodní hranice k horní. K nalezení partikulárního řešení je následně použito pravé maticové dělení. K výpočtu všech řešení (2), která mohou být parametrizována jako

$$X = X_0 + TK \tag{4}$$

je potřeba nalézt levý nulový prostor A. T je libovolná polynomiální matice příslušné dimenze.

3. IMPLEMENTACE

Uvedená metoda byla implementována ve funkcích *sxab*, *saxbyc, sxaybc* a *saxybc* . Dále uvedeme popis *sxab*.
Příkaz $X_0 = sxab(A,B,p)$ nalezne partikulární řešení lineární maticové polynomiální rovnice (2). Příkazem $X_0 = sxab(A,B,p,degree)$hledáme řešeníX_0stupně *degree*. Pokud není stupeň specifi-

kován, pak je nelezeno řešení minimálního stupně. Příkaz $[X_0, K] = sxab(A, B, p)$ vypočítá řešení X podle rovnice (3). Průběh výpočtu může být vizualizován, pokud je nastavena globální vlastnost *verbose level.* Funkce zobrazuje očekávaný rozsah stupňů řešení, již postupně vyzkoušené stupně a nakonec stupeň nalezeného řešení. Funkce *saxbyc, sxaybc* a *saxybc* volají rutinu *sxab* po příslušné úpravě matic *A* a *B*. Dále byly vytvořeny pomocné funkce pro symbolické výpočty Kroneckerova součinu (*skron*), stupně polynomiální matice (*matdeg*) a symbolických koeficientů polynomiální matice (*matcoef*).

Pro ilustraci uvedených funkcí a jejich použití uvádíme příklad.
Nejprve musí být zavedeny symbolické objekty pro proměnnou a koeficienty:

```
syms a b s
```

Vstupní matice jsou:

```
A=[a*s (a+b)*s;s+1 5*s;a*b*s 1]
B=[a*b*s^3+s^2+(a+1)*s 6*s^2+(a+b)*s]

A =
[     a*s,  (a+b)*s]
[     s+1,      5*s]
[   a*b*s,        1]
B =
[ a*b*s^3+s^2+(a+1)*s, 6*s^2+(a+b)*s]
```

Obecné řešení diofantické rovnice:

```
[X,K]=sxab(A,B,s)
SXAB: Minimum expected degree: 2. / Maximum expected degree:
5.
SXAB: Seek minimum degree solution.
SXAB: Attempt # 1   Degree 2.   Yes.
SXAB: Solution of degree 2 was found.
SXAB: Null-space computation.
NULL: Attempt # 1   Degree 2.   Yes.
X =
[   1,    s, s^2]
K =
[   s+1-5*a*b*s^2,   -a*s+(a+b)*b*a*s^2, (-b-a)*s+(4*a-b)*s^2]
```

Ověření výsledku:

```
simplify((X+K)*A-B)
ans =
[ 0, 0]
```

4. SHRNUTÍ

Bylo experimentálně ověřeno, že implementované funkce fungují správně. V některých složitějších případech (vyšší stupně polynomiálních matic), jsou dosti pomalé, což je ovšem typické pro symbolické výpočty. Lze ukázat, pro určité příklady, že je možné dosáhnout vyšší přesnosti symbolickým výpočtem s následným dosazením čísel za proměnné, než při přímém numerickém výpočtu.

REFERENCE

[1] V. Kučera, *Discrete Linear Control:The Polynomial Equation Approach*, Wiley,Chichester,1993.
[2] M. Šebek, H. Kwakernaak, *Polynomial Toolbox Manual*, Polyx s.r.o., Praha, 1999.
[3] D. Henrion, *Reliable Algorithms for Polynomial Matrices*, CSc. thesis, UTIA, Prague, 1998.

KONTAKTY

Ing. Michael Šebek, DrSc., Centrum aplikované kybernetiky, České vysoké učení technické v Praze, m.sebek@c-a-k.cz
Adéla Klimentová, Katedra řídicí techniky, Fakulta elektrotechnická, ČVUT, klimena@fel.cvut.cz.