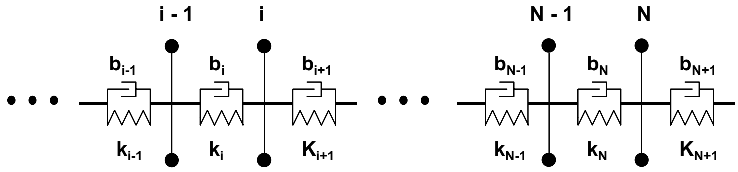
ŘEŠENÍ KMITÁNÍ LINEÁRNÍCH DISKRÉTNÍCH SOUSTAV POMOCÍ MATLABU

Dr. Ing. Gabriela Tůmová[*], *Prof. Ing. Michael Valášek, DrSC.*[**]
ČVUT v Praze, Fakulta strojní

1. Úvod

Pohybové rovnice diskrétních lineárních systémů (obr. 1) tvoří soustavu lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu, které se maticově dají zapsat ve tvaru:

$$M \cdot \ddot{\Phi}(t) + B \cdot \dot{\Phi}(t) + K \cdot \Phi(t) = F(t) \qquad (1)$$



Obrázek 1: Diskrétní lineární soustava

kde matice hmotnosti M, tlumení B a tuhosti K jsou čtvercové reálné matice řádu N. Matice M navíc bývá symetrická pozitivně definitní (ve většině případů diagonální).

Podle vlastností matic B, K rozdělujeme soustavu do následujících tříd [1]:

- Soustava konzervativní (B = 0)
- Soustava slabě nekonzervativní ($K \cdot M^{-1} \cdot B = B \cdot M^{1} \cdot K$)
- Soustava silně nekonzervativní ($K \cdot M^{-1} \cdot B \neq B \cdot M^{-1} \cdot K$)

2. Konzervativní a slabě nekonzervativní soustavy

2.1 Určení vlastních frekvencí a vlastních vektorů

Pro oba případy (konzervativní i slabě nekonzervativní soustavy) vychází výpočet z homogenní diferenciální rovnice:

$$M \cdot \ddot{\Phi}(t) + K \cdot \Phi(t) = 0 \qquad (2)$$

které vyhovují řešení:

$\Phi(t) = u \cdot e^{i\Omega t}$ a $\Phi(t) = w \cdot e^{i\Omega t}$.

Derivací a dosazením do rovnice (2) nalezneme základní úlohy pro řešení vlastních čísel a vektorů.

$$(K - \Omega^2 \cdot M) \cdot U = 0 \qquad (3)$$

$$W \cdot (K - \Omega^2 \cdot M) = 0 \qquad (4)$$

Příklad výpočtu v Matlabu

```
% Vlastni frekvence a vektory
% L ... vlastni frekvence
% U ... vlast. pravostr. vektory
% W ... vlast. levostranne vektory
[U,L] = eig(inv(M)*K);
[W,L1] = eig(inv(M')*K');

% Razeni levostrannych vlastnich
vektoru
Y = W;
for i = 1:N,
   L2 = diag(L);
   [j] = find(L1(i,i) == L2);
   Y(:,i) = W(:,j);
end
W = Y;
```

V případě symetrických matic M a K jsou pravo- i levostranné vektory totožné (U = W).

Pro jednoznačné určení je nutné vlastní vektory normovat [1], [2]. Normu je třeba zvolit tak, aby vektory splňovaly vztahy:

$$W^T \cdot M \cdot U = I, \quad W^T \cdot K \cdot U = \Lambda \qquad (5)$$

```
 % Normovani vlastnich vektoru
Mmod = W'*M*U;
U = U*inv(sqrt(Mmod));
W = W*inv(sqrt(Mmod));
```

Pro slabě nekonzervativní soustavu je třeba vlastní frekvence dále upravit:

Matice tlumení B se převede na diagonální matici. Po zavedení modální transformace

$$\Phi = U \cdot \xi \qquad (6)$$

a s využitím normovaných vektorů (5) přejde rovnice (1) pro případ volného kmitání do tvaru:

$$\ddot{\xi} + 2 \cdot D \cdot \dot{\xi} + \Lambda \cdot \xi = 0$$

Z toho vyplývá, že vlastní čísla jsou ve tvaru $\lambda = -\delta \pm \sqrt{-\Omega_t^2}$, kde Ω_t představuje vlastní frekvenci tlumeného soustavy.

```
%Transformovana matice tlumeni D
D = W'*B*U;

%Vypocet vlastnich hodnot
for n = 1:N,
   delta(n) = D(n,n)/2;
   % br ... pomerny utlum
   br(n) = delta(n)/sqrt(L(n,n));
   % Lt ... vlastni frekvence
   Lt(n) = abs(sqrt(L(n,n)*...
      (1-br(n)^2)));
end
```

2.2 Volné kmitání

Pro oba typy soustav je třeba převést počáteční podmínky do modálních souřadnic.

$$\xi(0) = W^T \cdot M \cdot \Phi$$
$$\dot{\xi}(0) = W^T \cdot M \cdot \Phi \qquad (7)$$

```
% Transformace poc. podminek
posuv = W'*M*pocposuv;
rychlost = W'*M*pocrychlost;
```

2.2.1 Konzervativní soustavy

Volné kmitání v zobecněných souřadnicích [1] v návaznosti na transformaci (7) vychází ve tvaru:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{N} U_i \cdot \left[\xi(0) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \frac{\dot{\xi}(0)}{\Omega} \sin(\Omega \cdot t) \right] \qquad (8)$$

```
for m = 1:length(t)
   for k=1:N,
   for n=1:N,
      if L(n,n)~=0
         vysl(m,n)=(posuv(n)*cos(L(n,n)*t(m))...
            + (rychlost(n)/L(n,n))*sin(L(n,n)*t(m)))*U(k,n);
         vyslrychl(m,n)=L(n,n)*(-posuv(n)*sin(L(n,n)*t(m)) + ...
            (rychlost(n)/L(n,n))*cos(L(n,n)*t(m)))*U(k,n);
      else
         vysl(m,n)=posuv(n)*cos(L(n,n)*t(m))*U(k,n);
         vyslrychl(m,n)=-L(n,n)*posuv(n)*sin(L(n,n)*t(m))*U(k,n);
      end
   end
   xhom(m,k) = sum(vysl(m,:));
   end
end
```

2.2.2 Slabě nekonzervativní soustavy

Řešení – charakter pohybu - závisí na typu tlumení. Rozlišujeme podkritické ($b_r^2 < 1$), kritické ($b_r^2 = 1$) a nadkritické tlumení ($b_r^2 > 1$). Z použití transformace (7) vyplývají následující řešení:

Podkritické tlumení

$$\Phi(t)=\sum_{n=1}^{N}U_n\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\left[\xi(0)\cdot\cos(\Omega_t\cdot t)+\frac{\dot{\xi}(0)+\delta\cdot\xi(0)}{\Omega_t}\sin(\Omega_t\cdot t)\right] \qquad (9)$$

Kritické tlumení

$$\Phi(t)=\sum_{n=1}^{N}U_n\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\left[\xi(0)+(\dot{\xi}(0)+\delta\cdot\xi(0))\cdot t\right] \qquad (10)$$

Nadkritické tlumení

$$\Phi(t)=\sum_{n=1}^{N}U_n\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\left[\xi(0)\cdot\cosh(\Omega_t\cdot t)+\frac{\dot{\xi}(0)+\delta\cdot\xi(0)}{\Omega_t}\sinh(\Omega_t\cdot t)\right] \qquad (11)$$

```
%Odezva na pocatecni podminky
for m = 1:length(t),
   for k=1:N,
   for n=1:N,
      % Podkriticke tlumeni
      if br(n)^2 < 1
         if Lt(n)~=0
            vysl(m,n) = exp(-delta(n)*t(m))*(posuv(n)*cos(Lt(n)*t(m))+ ...
               ((rychlost(n)+delta(n))/Lt(n))*sin(Lt(n)*t(m)))*U(k,n);
         else
            vysl(m,n) = exp(-delta(n)*t(m))*...
               (posuv(n)*cos(Lt(n)*t(m)))*U(k,n);
         end
      % Kriticke tlumeni
      elseif br(n)^2 == 1
         vysl(m,n) = exp(-delta(n)*t(m))*...
            (posuv(n)+(rychlost(n)+delta(n)*posuv(n))*t(m))*U(k,n);
      % Nadkriticke tlumeni
      else
         if Lt(n)~=0
            vysl(m,n) = exp(-delta(n)*t(m))*(posuv(n)*cosh(Lt(n)*t(m))+ ...
               ((rychlost(n)+delta(n))/Lt(n))*sinh(Lt(n)*t(m)))*U(k,n);
         else
            vysl(m,n) = exp(-delta(n)*t(m))*...
               (posuv(n)*cos(Lt(n)*t(m)))*U(k,n);
         end
      end
   end
   xhom(m,k) = sum(vysl(m,:));
   end
end
```

2.3 Vynucené kmitání

Pro zjednodušení je naznačen výpočet pouze pro případ buzení harmonickými silami. Základní rovnici (1) můžeme v tomto případě přepsat do tvaru:

$\Phi(t)=(K+i\cdot\Omega\cdot B-\Omega^2\cdot M)^{-1}\cdot f(t)=H\cdot f(t)$

Přenosovou matici H lze nazvat maticí dynamické poddajnosti uvažované soustavy.

Určení matice přenosu pro konzervativní soustavu

```
H = U*inv(L-omega1^2*diag(ones(2,1)))*W';
```

Určení matice přenosu pro slabě nekonzervativní soustavu

```
H = inv(K+i*omega(m)*B-omega(m)^2*M);
```

3. Silně nekonzervativní soustavy

V případě silně nekonzervativních soustav je vhodné převést model do stavového prostoru s dvojnásobnou dimenzí. Charakteristická rovnice (1) pak bude mít tvar:

$$MM \cdot \dot{x}(t) + KK \cdot x(t) = f(t) \qquad \textbf{(12)}$$

$$x = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \Phi \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{\Phi} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Matice MM a KK jsou čtvercové matice dimenze 2N.
V analogii s (3) a (4) nalezneme vlastní čísla a vektory homogenního modelu (12).

```
% Sestaveni stavovych rovnic
MM = [O M;M B];
KK = [-M O;O K];
% Levostranne vektory a vlastni
frekvence
[U,L] = eig(-inv(MM)*KK);
%Pravostranne vektory
[W,LL] = eig(-inv(MM')*KK');
```

3.1 Řazení vlastních čísel a vektorů

Kořeny charakteristické rovnice, resp. její vlastní čísla jsou buď po dvojicí komplexně sdružená, nebo reálná. Uspořádejme vlastní čísla viz [1].

$$\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j \qquad \lambda_j = -\alpha_j - i\beta_j \qquad j = 1, 2, \dots m$$
$$\lambda_j = -\alpha_j \qquad j = 2m+1, \dots 2N \qquad \textbf{(13)}$$

Podle seřazených vlastních čísel je třeba uspořádat pravo- i levostranné vlastní vektory. Vlastní vektory musí být normovány – v analogii s podmínkami (5). Všechny matice jsou čtvercové dimenze 2N, kde U značí matici pravostranných vlastních vektorů, W – levostranných vlastních vektorů a Λ diagonální matici vlastních frekvencí:

$$\overline{W}^T \cdot MM \cdot \overline{U} = I, \quad \overline{W}^T \cdot KK \cdot \overline{U} = -\overline{\Lambda} \qquad \textbf{(5')}$$

```
% Razeni vlastnich frekvenci
L1 = L;
for i = 1:2*N,
   L11(i) = L1(i,i);
   if real(L11(i)) > 0
      disp('Soustava je nestabilni');
   end
   if imag(L11(i)) > 0
      zaporny(i) = L11(i);
   elseif imag(L11(i)) < 0;
      kladny(i) = L11(i);
   else
      realny(i) = L11(i);
      disp('Soustava je pretlumena');
   end
end
kladny = nonzeros(sort(kladny))';
zaporny = nonzeros(sort(zaporny))';
realny = (realny)';
for j = 1:2*N,
   if j <= length(kladny)
      L(j,j) = kladny(j);
   elseif j > length(kladny) & j <= (length(kladny)+length(zaporny))
      L(j,j) = zaporny(j - length(kladny));
   elseif j > (length(kladny)+length(zaporny))
      L(j,j) = realny(j - length(kladny) - length(zaporny));
   end
end
```

3.2 Vynucené kmitání

Podobně jako u slabě nekonzervativních soustav naznačíme jen řešení pro harmonické buzení. V modálních souřadnicích dostaneme vztah mezi buzením a odezvou [5]:

$$x = \overline{U}(i \cdot \Omega \cdot I - \overline{\Lambda})^{-1} \cdot \overline{W}^T \cdot f \tag{14}$$

Pokud jsou splněny podmínky (5’) a (13) vychází řešení pohybu v zobecněných souřadnicích:

$$\Phi = U \cdot D \cdot W^T + U^* \cdot D^* \cdot W^{*T} \cdot F = H \cdot f$$

$$D = diag\left(\frac{1}{i \cdot \Omega - \lambda}\right) \qquad D^* = diag\left(\frac{1}{i \cdot \Omega - \lambda^*}\right)$$

λ, λ^* … komplexně sdružená vlastní čísla

Určení matice přenosu pro silně nekonzervativní soustavu

```
H = U((N/2+1):N,1:N/2)*D*W((N/2+1):N,1:N/2)' + ...
      U((N/2+1):N,(N/2+1):N)*DS*W((N/2+1):N,(N/2+1):N)';
```

4. Závěr

Příspěvek popisuje řešení diskrétních soustav metodou modální transformace, spočívající v náhradě vzájemně vázaných diferenciálních rovnic vyšetřovaného dynamického systému, za soustavu nezávislých samostatně řešitelných rovnic. Naznačen je výpočet vlastních frekvencí a vektorů, volného kmitání a vynuceného kmitání pro systémy bez a s tlumením.

Seznam použité literatury

[1] Slavík J., Stejskal V., Zeman V., Základy dynamiky strojů, ČVUT 1997

[2] Stejskal V, Stejskal S., Mechanika výrobních strojů a zařízení, ČVUT 1994

[3] Brepta R., Půst L., Turek F., Mechanické kmitání, Technický průvodce 71, Sobotáles 1994

[4] Daněk O., Nekonzervativní dynamické systémy, Strojnícký časopis 33, č. 6, 1982

[5] Miláček S., Vyšší dynamika, ČVUT 1998

* Ústav vozidel a letadlové techniky, Technická 4, Praha 6, 160 00, tumova@fsid.cvut.cz
** Ústav mechaniky, Karlovo náměstí 13, Praha 2, 121 35, valasek@fsik.cvut.cz