NEPARAMETRCKÝ ODHAD MODELU GARCH-M

Q. V. Tran, J. Radová

Vysoká škola ekonomická v Praze

Abstrakt

Modely typu GARCH jsou obvykle odhadovány metodou maximální věrohodnosti, a to buď parametrickým nebo neparametrickým přístupem. Odhad modelu GARCH parametrickým přístupem je velmi pohodlný, nicméně odhadnuté parametry touto technikou silně závisí na distribuční specifikaci. Nevhodně zvolený typ rozdělení náhodné složky může vést k nekonzistentním odhadům parametrů tohoto modelu. Jako alternativa k této technice proto je zvolen neparametrický přístup, ve kterém jak parametry modelu, tak i rozdělení náhodné složky jsou odhadnuty přímo z dat. K nalezení řešení maximalizujícího hodnotu věrohodnostní funkce místo tradiční optimalizační techniky se v této práci používá heuristický algoritmus, konkrétně diferenciální evoluce. Tento heuristický přístup sice nemusí najít skutečné optimální řešení, ale může efektivně zabránit tomu, aby se postup při hledání řešení uvízl v lokálním optimu. Vhodnost zvolené metody bude ověřena na modelování forwardové prémie směnného kurzu, a to kurz české koruny vůči americkému dolaru a společné měně Euro modelem GARCH-M v období od roku 2007 do roku 2012. Výsledky získané toto metodou budou také porovnány s výsledky téhož modelu získanými tradiční optimalizační metodou. Celý výpočet v této práci je proveden v prostředí Matlab.

1 Úvod

Od chvíle, kdy Engle [3] (specifikace ARCH) a později Bollerslev [1] vypracovali model zobecněné autoregresní podmíněné heteroskedasticity (GARCH) se ukazuje, že modely z této rodiny jsou cennými nástroji pro modelování finančních časových řad s časově proměnlivou volatilitou. Finanční data, jak známo, ve většině případech nemají normální rozdělení. Jejich rozdělení bývají leptokurtická, to znamená, že jsou špičatější a mají tlustší konce než normální rozdělení. Nevždy tento fakt bývá brán na zřetel při odhadu parametrů modelu z této rodiny. Spíše naopak, jeho parametry jsou nejčastěji odhadovány metodou maximální věrohodnosti, při které se musí specifikovat typ rozdělení náhodné složky modelu. Častá specifikace při odhadu je normální rozdělení. Tuto specifikaci lze modifikovat Studentovým t-rozdělením, případně obecným rozdělením náhodného členu modelu. Víme, že chybná specifikace typu rozdělení při odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti může vést k jejich nekonzistentním odhadům a proto při odhadu parametrů modelu GARCH parametricky pomocí určitého typu rozdělení nezajistí konzistentní odhad jeho parametrů.

Další problém spojený s odhadem parametrů modelu je ten, že se nejčastěji maximum věrohodnostní funkce hledá pomocí tradičních iterativních optimalizačních metod. Běžně se používá např. Newtonova Raphsonova metoda, Berndtův - Hallův - Hallův a Hausmanův algoritmus (zkráceně BHHH, [2]) nebo Marquardtova metoda [5]. Tyto metody vycházejí z určitých počátečních hodnot všech odhadovaných parametrů modelu a v každém kroku se tyto hodnoty přibližují k maximu věrohodnostní funkce. Má-li tato funkce jedno jediné maximum, odhadované parametry modelu se vždy najdou po určitém počtu iterací. Pokud jich má však více, tyto metody mohou nalézt pouze lokální maximum, nikoliv globální maximum. A neexistuje žádný způsob, jak dostat optimalizační iterace z lokálního optima k globálnímu optimu. Globálně optimální řešení je možné získat pouze v případě, že začínáme optimalizační postup s hodnotami parametrů v okolí bodu optima. To však nemůžeme vědět předem, kde se nachází.

Abychom předešli zmíněným problémům, navrhujeme odhad modelu GARCH neparametrickým postupem. Při tomto postupu nejen parametry modelu, ale i pravděpodobnostní rozdělení chybové složky modelu jsou odhadnuty z dat. Tento postup odstraní problém s možnou chybnou specifikaci typu rozdělení, která vede často k nekonzistentním odhadům parametrů modelu. Pokud jde o vyřešení problému spojeného s tradičními optimalizačními metodami, místo nich zvolíme heuristickou optimalizační techniku, konkrétně diferenciální evoluci, při hledání hodnot parametrů modelu maximalizující jejich věrohodnostní funkci. Heuristické metody sice nezaručí, že nalezené hodnoty jsou skutečně optimální hodnoty, ale spolehlivě zabraní tomu, aby se optimalizační proces uvízl v lokálním maximu věrohodnostní funkce. Takto zvolená metodika, pokud je nám známo, je zcela nová a výrazně se liší od často citovaného přístupu od Buhlmanna a McNeila [6]. Abychom ověřili správnost námi navrženého postupu, budeme jej verifikovat na specifikaci GARCH-M na datech o forwardovém měnovém kurzu české koruny vůči společné měně Euru a americkému dolaru v období 2007- 2012. Tyto výsledky jsou následně porovnány s výsledky získanými tradiční optimalizační metodou pro stejný datový soubor.

2 Model GARCH-M a jeho odhad

Engle v roce 1982 přišel s jednoduchým modelem autoregresní podmíněné heteroskedasticity, jehož specifikace se skládá ze dvou rovnic. První z nich je rovnice podmíněného průměru:

$$y_t = X_t^T b + \epsilon_t, \tag{1}$$

kde y_t je podmíněný průměr, X_t je matice vysvětlujících proměnných, b je vektor koeficientů a ϵ_t je náhodná složka neznámého rozdělení s nulovým průměrem a podmíněným rozptylem h_t vzhledem k množině informací $\mathcal{F}$ dostupných v čase $t-1$ ($\epsilon_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim (0, h_t)$. Druhá rovnice je rovnice podmíněného rozptylu, který je autoregresní proces čtverců náhodné složky řádu p:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_1\epsilon_{t-2}^2 + ... + \alpha_p\epsilon_{t-p}^2. \tag{2}$$

Aby byla zajištěna podmínka nezápornosti podmíněného rozptylu, všechny koeficienty v rovnici podmíněného rozptylu musí být kladné a jejich součet musí být menší než 1.

Bollerslev [1] v roce 1986 zobecnil Engleův model ARCH na model GARCH zahrnutím q zpožděných členů od h_{t-1} až h_{t-q} do vztahu pro podmíněný rozptyl a rovnice (2) nabývá následující podobu:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_1^p \alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_1^q \beta_j h_{t-j}. \tag{3}$$

Podmínka nezápornosti podmíněného rozptylu opět vyžaduje, aby všechny koeficienty v rovnici (3) byly nezáporné a jejich součet byl menší než 1. Engle, Lilien a Robins [7] v roce 1987 začlenili podmíněný rozptyl do rovnice (1), tím vytvořili tzv. model ARCH-M, jehož rovnice podmíněného rozptylu má následující podobu:

$$y_t = X_t^T b + \delta h_t + \epsilon_t. \tag{4}$$

Začleněním podmíněného rozptylu do rovnice podmíněného průměru činí podmíněný průměr funkcí podmíněného rozptylu. To znamená, že změna ve variabilitě průměru zpětně ovlivní samotný průměr a čím vyšší je variabilita v minulosti, tím více se to projeví na změně samotného průměru v současnosti. O rok později specifikace ARCH-M byla rozšířena o členy zpožděného podmíněného rozptylu v rovnici pro podmíněný rozptyl a tak vznikl zobecněný model GARCH-M.

Parametry modelu GARCH-M jsou nejčastěji odhadovány metodou maximální věrohodnosti, pokud jsou p a q jsou relativně malá čísla. Na začátku jsme předpokládali, že náhodná složka modelu pochází z nějakého pravděpodobnostního rozdělení s nulovým průměrem a podmíněným rozptylem ϵ_t. Jelikož z rovnice (3) ji můžeme vyjádřit takto:

$$\epsilon_t = y_t - X_t^T b - \delta h_t. \tag{5}$$

Dosadíme $h_t = \alpha_0 + \sum_1^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_1^q \beta_j h_{t-j}$ do rovnice (5), dostaneme:

$$\epsilon_t = y_t - X_t^T b - \delta(\alpha_0 + \sum_1^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_1^q \beta_j h_{t-j}). \tag{6}$$

y_t je vektor vysvětlované proměnné, X_t je matice vysvětlujících proměnných, oba jsou známé. Z toho je patrné, že odpovídající věrohodnostní funkce náhodné složky modelu musí být funkcí neznámých parametrů b, α_0, α_i a β_j, které spojíme do vektoru neznámých parametrů θ, a jejího podmíněného rozptylu h_t. Souhrnně můžeme věrohodnostní funkci formalizovat l takto:

$$l(\theta, h_t; y_t \mid X_t) = f(y_t \mid X_t; \theta, h_t). \tag{7}$$

Protože máme T pozorování a jednotlivý člen náhodné složky musí být nezávislý na ostatních, celková věrohodnostní hodnota L je:

$$L = \prod_1^T f(y_t \mid X_t; \theta, h_t). \tag{8}$$

Zlogaritmujeme vztah (5), obdržíme tzv. logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$\ln L = \sum_1^T \ln f(y_t \mid X_t; \theta, h_t). \tag{9}$$

Je-li rozdělení náhodné složky modelu známé, odhad vektoru parametrů θ se stává běžným optimalizačním problémem, tj. najít takový vektor θ, který maximalizuje hodnotu $\ln L$. Např. předpokládejme, že náhodná složka má normální rozdělení s nulovým průměrem a podmíněným rozptylem h_t, potom její věrohodnostní funkce je:

$$f(\epsilon_t; 0, h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{(y_t - X_t^T b - \delta h_t))^2}{h_t}\right). \tag{10}$$

Zlogaritmujeme rovnici (10), dostaneme:

$$\ln f(\epsilon_t; 0, h_t) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln h_t - \frac{1}{2}\frac{(y_t - X_t^T b - \delta h_t)^2}{h_t}. \tag{11}$$

Celková věrohodnostní hodnota

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_1^T \ln h_t - \frac{1}{2}\sum_1^T \frac{(y_t - X_t^T b - \delta h_t)^2}{h_t}, \tag{12}$$

kde $h_t = \alpha_0 + \sum_1^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_1^q \beta_j h_{t-j}$. Z toho je zřejmé, že odhad parametrů modelu GARCH-M parametrickou metodou je velmi pohodlný. K nalezení optimální vektor parametrů θ můžeme použít některou ze známých optimalizačních metod pro nelineární věrohodnostní funkci $\ln L$. Takový odhad ovšem nemusí být konzistentní v případě, že rozdělení náhodné složky je špatně specifikováno. Abychom tomu zabránili, budeme se snažit z vstupních dat odhadnout i rozdělení náhodné složky.

3 Kernelový odhad rozdělení náhodné složky modelu

Parametrický odhad parametrů modelu GARCH-M je pohodlný, protože apriorně předpokládá funkční tvar pravděpodobnostního rozdělení náhodné složky modelu. Neparametrický přístup odhadu postupuje jinak. Považuje za nutné, aby funkční tvar rozdělení byl odhadnut z dat stejně tak jako parametry modelu. Vychází z definice hustoty pravděpodobnosti, že pro spojitou náhodnou veličinu X s hustotou rozdělení $f(x)$ musí platit:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{13}$$

přičemž $f(x)$ známe a musíme ji odhadnout z pozorování $(x_1, x_2, ..., x_n)$, které jsou považovány za nezávislé realizace náhodné veličiny X. V našem případě je to náhodná složka modelu ϵ_t, která tuto podmínku splňuje. Vztah (13) můžeme aproximovat následujícím způsobem:

$$P(x-h \leq X \leq x+h) = \int_{x-h}^{x+h} f(x)dx \approx 2hf(x), \tag{14}$$

kde h je malé kladné číslo. Vztah (14) můžeme upravit na:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2h} P(x-h \leq X \leq x+h). \tag{15}$$

Protože $P(x-h \leq X \leq x+h)$ můžeme vypočíst jako:

$$P(x-h \leq X \leq x+h) = \frac{\# \in (x-h, x+h)}{n},$$

kde n je celkový počet pozorování, potom upravíme (15) na:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2h} \frac{\# \in (x-h, x+h)}{n}. \tag{16}$$

Vztah (16) není nic jiného než definice histogram a histogram je tedy hrubý odhad hustoty rozdělení náhodné veličiny. Histogram poskytuje základní informace o typu rozdělení náhodné veličiny, o její šikmosti, špičatosti. Nicméně je to pouze hrubý odhad hustoty, protože je to schodkovitá funkce a v případě, že některý z těch intervalů je prázdný, je to i nespojitá funkce. Hladkost a spojitost odhadnuté hustoty lze dosáhnout následujícím způsobem. Rovnici (16) upravíme na:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n w(x - x_i, h), \tag{17}$$

kde $(x_1, x_2, ..., x_n)$ jsou realizace náhodné veličiny X a $w(t, h)$ je tzv. váhová funkce definovaná následovně:

$$w(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{if } |t| < h, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{18}$$

Je snadné dokázat, že funkce $\hat{f}(x)$ splňuje všechny podmínky pro hustoty pravděpodobnosti, tj. je nezáporná a $\sum_1^n \frac{1}{n} \sum_1^n w(x - x_i, h) = 1$. Ukazuje se, že odhadnuté hladké rozdělení pravděpodobnosti je vážený průměr těch pozorování, které padají do symetrického okolí bodu, ve kterém odhadujeme, přičemž váhy jsou určeny váhovou funkcí $w(t, h)$. Váhovou funkci také nazývají kernelovou (jádrovou) funkci, kterou značíme jako $\mathcal{K}(x)$. Existuje poměrně velké množství kernelových funkcí, které by měly být symetrické a ohraničené. Nejčastěji používané kernelové funkce jsou normální, Epanečnikovova a trojúhelníková. Z rovnice (17) je patrné, že vlastnost odhadnuté hustoty rozdělení $\hat{f}(x)$ závisí jak na volbě typu kernelové funkce, tak na zvolené délce intervalu kolem bodu, v němž odhadujeme tuto hustotu. Ukazuje se, že odhad hustoty nezávisí tolik na volbě kernelu, ale je silně závislý na délce vyhlazovacího okna [4]. Čím širší je toto okno, tím hladší je odhadnutá hustota, což ale také znamená, že odklon od skutečné hustoty bude větší. Naopak, pokud je délka tohoto okna je menší, odklon skutečné hustoty bude menší, zato však má větší rozptyl. Volba délky tohoto okna proto musí být kompromisem mezi těmito dvěma faktory.

Předpokládejme, že máme odhadnutou hustotu rozdělení náhodné složky modelu GARCH-M ve formě:

$$\hat{f}(\epsilon) = \frac{1}{Th} \sum_1^T \mathcal{K}\left(\frac{\epsilon - \epsilon_t}{h}\right), \tag{19}$$

potom odhad parametrů modelu GARCH-M znamená najít vektor parametrů θ, který maximalizuje hodnotu logaritmické věrohodnostní funkce:

$$\ln L = \sum_1^T \ln \left[\frac{1}{Th} \sum_1^T \mathcal{K}\left(\frac{\epsilon - \epsilon_t}{h}\right)\right], \tag{20}$$

kde $\epsilon_t = y_t - X_t^T b - \delta h_t$.

4 Diferenciální evoluce

Optimální řešení pro logaritmickou věrohodnostní funkci (20) je možné najít pomocí tradičních optimalizačních metod. Funkce (20) je funkce s poměrně velkým počtem nezávislých proměnných se složitým průběhem, proto nelze vyloučit, že se jedná o vícemodální funkci. Z toho plyne, že optimální řešení nemusí být globální, ale pouze lokální. Abychom obešli tomuto problému, používáme heuristický algoritmus zvaný diferenciální evoluci pro hledání optimálního řešení.

Jedná se o poměrně nový heuristický postup pro hledání globálního optima funkcí více proměnných, který navrhli Storn a Price [8] na konci 90. let minulého století. Jedná se o jednoduchý model Darwinovy evoluční teorie vývoje populací a využívá se různých pojmů z evoluční teorie jako jedinec, populace, generace, evoluce, rodič, potomek, křížení, mutace. Na začátku se vygeneruje populace s určitým počtem jedinců. Přechod k nové generaci probíhá tak, že se každý jedinec z původní generace kříží se svým vlastním náhodným mutantem. Tím vznikne nový potomek a pokud je kvalitnější než svůj rodič, tak ho vytlačí z původní populace. Tím vzniká nová populace. Jednoduchým cyklem přes všechny jedince staré populace tak dostaneme celou novou populaci, která nemůže být horší, než ta stará. Probíhá tedy určité přibližování se k optimálnímu řešení a tím se liší diferenciální evoluce od náhodného prohledávání. Podstatou úspěchu diferenciální evoluce je tedy generace náhodného mutanta a jeho křížení s rodiči.

Při hledání optima spojité funkce $f(x)$ na neprázdné oblasti $D = \{x \in R^d : a \leq x \leq b\}$ vycházíme z náhodné populace N jedinců, tedy z množiny $P = (x_1, \ldots, x_N) \subset D$. Potom pro každý vektor x_k ze staré populace P určíme mutanta y s využitím nových vzájemně různých jedinců r_1, r_2, r_3 z populace P podle vztahu:

$$y = r_1 + F(r_2 - r_3) \tag{21}$$

kde $0 < F \leq 1$ je parametr ovlivňující rozsah mutace. Uvedená technika mutace je označována jako náhodná evoluce. Alternativním postupem při vygenerování nové generace ní je cílená mutace, kdy vybereme nejlepšího (má nejlepší hodnotu účelové funkce f) jedince x_{best} z populace P a čtyři od sebe různé jedince r_1, r_2, r_3, r_4 z populace P podle vztahu:

$$y = x_{\text{best}} + F(r_1 + r_2 - r_3 - r_4). \tag{22}$$

Takto vzniklý mutant y nemusí být prvkem oblasti D. V tom případě ho překlopíme zpět s využitím jedné nebo několika hraničních nadrovin oblasti D. Uvedená korekce polohy je nazývána zrcadlení. Při křížení rodiče x_k s (případně korigovaným) mutantem y vyjadřujeme genetickou převahu mutanta parametrem $0 \leq C \leq 1$ a náhodného křížence z generujeme po složkách vztahem

$$z_j = \begin{cases} y_j & \text{pro} \;\; rnd_j < C, \\ x_j & \text{pro} \;\; rnd_j \geq C, \end{cases} \tag{23}$$

kde $j = 1, \ldots, d$ a rnd_j je náhodné číslo z rovnoměrného rozdělení na intervalu [0, 1]. Nejen pro $C = 0$ se může stát, že $z = x_k$. V takovém případě náhodně vybereme index j a modifikujeme z_j na y_j. Souboj křížence z s rodičem x_k vyhrává kříženec pokud $f(z)$ je lepší než $f(x_k)$. V opačném případě vyhrává rodič. Jeden z nich se tak dostane do nové populace $Q \subset D$. Takto se postupně dopracujeme až ke konečné populaci, kterou poznáme podle toho, že rozpětí funkčních hodnot a jednotlivých souřadnic prvků populace nepřekračuje předem stanovené meze.

Pro diferenciální evoluci jsou důležité tři parametry: N, F a C. Vysoký počet jedinců N v populaci usnadňuje výběr, ale znesnadňuje výpočet. Parametr F, který se také nazývá diferenciální váha, umožňuje optimalizačnímu postupu přeskakovat z jedné lokální oblasti na druhou. Parametr C určí, jak bude vypadat nová generace. Diferenciální evoluce je poměrně závislá na volbě těchto parametrů. Storm a Price [8], a také Tvrdík [9] doporučují, aby se volilo $N = 4d$, $F = 0,8$ a $C = 0,5$. Má se za to, že diferenciální evoluce je z hlediska programování jednoduchá a rychlá. Optimum se najde s vysokou pravděpodobností.

5 Verifikace a její výsledky

Výše popsaný postup pro neparametrický odhad koeficientů modelu GARCH-M budeme aplikovat na odhad rizikové prémie forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru modelem GARCH-M. Podle kryté verze teorie parity úrokové míry musí platit:

$$1 + r = \frac{F_t^{t+1}}{S_t}(1 + r^f), \tag{24}$$

kde r je výnos aktiv denominovaných v domácí měně, r^f je výnos aktiv denominovaných v zahraniční měně, S_t je spotový měnový kurz v čase t, F_t^{t+1} je forwardový měnový kurz sjednaný v čase t a platný v čase $t + 1$. Vztah (24) zlogaritmujeme a po malé úpravě dostaneme:

$$f_t^{t+1} - s_t = r - r^f, \tag{25}$$

kde $f_t^{t+1} = \ln F_t^{t+1}$ a $s_t = \ln S_t$. Podobným způsobem můžeme odvodit vztah pro očekávaný spotový měnový kurz z nekryté verze teorie parity úrokových sazeb, a sice musí platit:

$$\mathrm{E}_t s_{t+1} - s_t = r - r^f, \tag{26}$$

Obrázek 1: Vývoj vypočtených rizikových prémií v čase

kde $\mathrm{E}_t s_{t+1}$ je očekávaný spotový směnný kurz v čase t pro čas $t+1$. Dlouho se mělo za to, že by forwardový měnový kurz měl být nestranným odhadem budoucího spotového směnného kurzu. Nicméně, byla pozorována systematická deviace forwardového kurzu od budoucího spotového kurzu a tato deviace by měla být prémie za riziko za forwardový měnový kurz a tato riziková prémie rp_t je definována takto:

$$rp_t = r - r^f - (f_t^{t+1} - s_t). \tag{27}$$

Zpočátku se snažilo modelovat tuto prémii lineárním modelem. Ten ji bohužel nedokázal spolehlivě zachytit. Další způsob modelování forwardové rizikové prémie vychází z modelu oceňování aktiv. Ten předpokládá, že se budoucí cena jakéhokoli aktiva diskontovaná stochastickým diskontním faktorem musí rovnat jeho dnešní ceně. To platí i pro měnu a měnový kurz je cena cizí měny vyjádřené v domácí měně. Riziková prémie potom musí být funkcí volatility budoucího kurzu a volatility stochastického diskontního faktoru. Když předpokládáme, že diskontní faktor je stabilní, potom riziková prémie forwardového měnového kurzu je funkce pouze volatility měnového kurzu. Za tohoto zjednodušeného předpokladu můžeme modelovat rizikovou prémii forwardového měnového kurzu modelem GARCH-M s následující specifikací:

rovnice podmíněného průměru:

$$rp_t = b_0 + \delta h_t + \epsilon_t, \tag{28}$$

rovnice podmíněného rozptylu:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}. \tag{29}$$

Použitá data a jejich předběžná analýza

Pro ověření námi navrženého postupu při odhadu parametrů modelu GARCH-M pro modelování rizikové prémie forwardového měnového kurzu používáme tyto časové řady: dvě řady denních spotových měnových kurzů EUR/CZK a USD/CZK. Dále jsou využívány čtyři řady denních forwardových prémií na Euro a USD pro dvě lhůty tři měsíce a šest měsíců, které přičítáme k hodnotám spotových kurzů, čímž získáváme řady denních forwardových kurzů EUR/CZK a USD/CZK na tři měsíce a 6 měsíců. Protože v České republice nejsou dostupné řady denních výnosů vládních dluhopisů se splatností na 3 měsíce a na 6 měsíců, používáme místo nich úrokovou sazbu na mezibankovním trhu v Praze PRIBOR na tři na na šest měsíců. Odpovídající sazby pro zahraniční měny jsou EURIBOR na Euro a LIBOR na americký dolar na období tři a šest měsíců. Všechna data jsou v období z května roku 2007 do února roku 2012. Jejich deskriptivní statistiky jsou uvedeny v Tabulkách 1 a 2.

Z těchto dat vygenerujeme čtyři řady rizikové prémie forwardového měnového kurzu EUR/CZK a USD/CZK podle vztahu (27), které značíme jako RPE3, RPE6, RPU3, RPU6. Jejich vývoj v čase je v Obr. 1. Pro stanovení stacionarity těchto řad provádíme na nich test jednotkového kořenu upraveným Dickey-Fullerovým testem. Výsledky tohoto testování referujeme v Tabulce 3.

Z výsledků test jednotkového kořenu je vidět, že tyto řady nejsou stacionární, proto musíme je transformovat na řady jejich diferencí, které už jsou stacionární. Řady diferencí jsou použity pro odhadu modelu GARCH-M.

Výsledky odhadu modelu GARCH-M neparametrickou metodou

Model GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru specifikovaný ve vztazích (28) a (29) je odhadován metodou maximální věrohodnosti. Odpovídající věrohodnostní funkce je definována vztahem (29), kde $\epsilon_t = \Delta rp_t - \delta h_t$ a h_t je definována vztahem (29). První hodnota $\epsilon_1 = h_1 = \frac{1}{T}\sum_{1}^{T} \Delta rp_t^2$. Protože odhad rozdělení náhodné složky modelu není ovlivněn volbou kernelu, používáme normální kernel jako kernelovou funkci. Pokud se jedná o délku vyhlazovacího okna, doporučuje se v literatuře, aby $h = 1.06 h_t T^{-\frac{1}{5}}$. My toto doporučení respektujeme. Odhadovaný vektor koeficientů je pětiprvkový: $\theta = (b_0, \delta, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)^T$, tedy máme $d = 5$. Koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ musí být nezáporné a jejich součet nesmí být vyšší než 1. Na b_0, δ není kladen žádný apriorní požadavek. Hodnoty těchto koeficientů maximalizující věrohodnostní funkce jsou odhadnuty diferenciální evolucí, jejíž parametry jsou: $N = 10d = 50$, $F = 0.8$ a $C = 0.5$, jak je doporučeno v literatuře. Pro každou řadu provádíme 100000 optimalizací. Pokud jde o přesnost odhadů, protože se jedná o odhady metodou maximální věrohodnosti, měly by mít asymptotické vlastnosti. Pro jejich rozptyl musí platit, že je omezen zdola, tedy:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)}, \tag{30}$$

Tabulka 1: Deskriptivní statistiky dat spojených s Eurem

	EUR/CZK	Forward 3m	Forward 6m	Euribor3	Euribor6	Pribor3
Průměr	25.53	25.53	25.52	2.26	2.45	1.98
Medián	25.34	25.37	25.37	1.429	1.68	1.490
Maximum	29.53	29.55	29.57	5.39	5.44	4.24
Minimum	22.94	22.89	22.83	0.63	0.94	0.74
Std. odch	1.18	1.18	1.19	1.68	1.59	1.26
Šikmost	0.839	0.768	0.702	0.690	0.714	0.557
Špičatost	3.213	3.102	2.999	1.673	1.715	1.621
Počet pozor.	1230	1230	1230	1230	1230	1230

Tabulka 2: Deskriptivní statistiky dat spojených s americkým dolarem

	USD/CZK	Forward 3m	Forward 6m	Libor U3	Libor U6	Pribor6
Průměr	18,42	18.43	18.44	1.54	1.73	2,19
Medián	18.40	18.42	18.42	0.52	0.76	1.72
Maximum	23.44	23.48	23.48	5.72	5.44	5.59
Minimum	14.40	14.44	14.46	0.24	0.38	1.03
Std. odch	1.55	1.54	1.52	1.72	1.62	1.17
Šikmost	0.144	0.153	0.153	1.196	1.097	0.557
Špičatost	2.822	2.853	2.883	1.673	2.847	1.633
Počet pozor.	1230	1230	1230	1230	1230	1230

Tabulka 3: Test jednotkového kořenu na řadách rizikových prémií

ŘADA	Coefficient γ	S.E.	Stat	p-value
RPE3	-0.001513	0.000815	-1.856831	0.0636
RPE6	-0.001608	0.000830	-1.936223	0.0531
RPU3	-0.002536	0.001420	-1.786448	0.0745
RPU6	-0.003526	0.001872	-1.883183	0.0602

kde $I(\theta) = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X,\theta)|\theta\right]$ je tzv. Fisherova informační matice. Tato matice je vypočítána numericky. Celý výpočet je proveden v prostředí Matlab. Výsledky neparamerického odhadu koeficientů modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru jsou uvedeny v Tabulce 4. Výsledky neparamerického odhadu koeficientů modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru jsou uvedeny v Tabulce 5. V obou tabulkách v hranatých závorkách jsou uvedeny hodnoty standardní odchylky odhadů.

Tabulka 4: Výsledky neparamerického odhadu modelu GARCH-M

	RPE3	RPE6	RPU3	RPU6
b_0	7.4440e-4 [0.0054e-4]	2.0619e-4 [0.2218e-4]	1.9696e-3 [NaN]	8.7083e-4 [1.6771e-4]
δ	7.8239 [0.5718e-4]	4.1048 [0.3356e-4]	3.6916 [0.0045e-6]	4.3378 [0.0014e-0]
α_0	8.5751e-4 [0.0038e-4]	7.9337e-4 [0.0001e-4]	5.5706e-4 [1.0317e-6]	5.2224e-4 [NaN]
α_1	0.0867 [0.0647e-4]	0.0296 [0.0246e-4]	4.6487e-3 [3.5106e-6]	5.0721e-3 [3.0359e-5]
β_1	0.8560 [0.0638e-4]	0.9598 [0.0012e-4]	0.9886 [8.6481e-6]	0.9862 [6.6635e-9]
$\ln L$	-21.280	-13.081	-46.225	-59.810

Tabulka 5: Výsledky paramerického odhadu modelu GARCH-M

	RPE3	RPE6	RPU3	RPU6
b_0	-0.0023 [0.0008]	0.0004 [0.0009]	0.0003 0.0005	0.0012 [0.0012]
δ	4.4603 [1.4660]	0.2441 [0.5325]	-0.0738 [0.6956]	-0.1182 [0.4105]
α_0	5.55E-6 [9.86E-7]	2.85E-05 [0.0001e-4]	3.15E-06 [1.44E-06]	6.33E-05 [8.69E-06]
α_1	0.0547 [0.0049]	0.1817 [0.0063]	0.1840 [0.012]	0.1540 [0.0100]
β_1	0.9378 [0.0043]	0.8502 [0.0048]	0.8523 [0.0085]	0.8404 [0.0081]
$\ln L$	-122.680	-103.108	-186.522	-229.112

Výsledky ukazují, že výsledky neparametrického odhadu se podstatně liší od výsledků parametrického odhadu modelu GARCH-M. Podle hodnoty věrohodnostní funkce se jeví neparametrický odhad modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu koruny vůči Euru a americkému dolaru jako lepší ve všech čtyřech řadách. Hodnoty věrohodnostní funkce neparametrickým odhadem jsou vyšší než hodnoty této funkce při parametrickém odhadu (parametrické odhady po dosazení do věrohodnostní funkce pro neparametrický odhad dávají nižší hodnoty věrohodnostní funkce, jsou tedy suboptimální z hlediska neparametrického odhadu). Také koeficient δ v rovnici podmíněného průměru je statisticky významný při neparametrickém odhadu ve všech případech, zatímco tento koeficient při parametrickém odhadu je statisticky významný pouze pro řadu RPE3. Další rozdíl mezi dvěma způsoby odhadu je ten, že zatímco můžeme velmi dobře kontrovat podmínku kladenou na hodnoty koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ při neparametrickém odhadu s využitím diferenciální evoluce, v případě parametrického odhadu koeficientů modelu GARCH-M s využitím tradiční optimalizační metody (Newtonovy - Raphsonovy metody) toto nemůžeme ovlivnit. Proto při neparametrickém odhadu součet hodnot koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ je vždy menší než 1, při parametrickém odhadu s tradiční optimalizační technikou tato podmínka není splněna v případě řady RPE6 a řady RPU3. Jsme si vědomi, že odhad koeficientů modelu GARCH je vždy spojen s řadou problémů. Odhad modelu GARCH-M je ještě složitější, protože se podmíněný rozptyl objeví v rovnici podmíněného průměru. Nicméně námi navržený způsob odhadu koeficientů modelu GARCH-M se jeví jako spolehlivý. Proto rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru můžeme vyjádřit takto:

$$rp_t = rp_{t-1} + b_0 + \delta h_t + \epsilon_t, \tag{31}$$

kde h_t je podmíněný rozptyl Δrp_t.

6 Závěr

Modely typu GARCH jsou obvykle odhadovány metou maximální věrohodnosti. Je poměrně snadné odhadnout je parametrickým způsobem, kdy se apriorně předpokládá typ rozdělení náhodné složky modelu. To však hrozí jedno nebezpečí. Pokud rozdělení náhodné složky není správně zvoleno, výsledné odhady koeficientů modelu mohou být nekonzistentní. Proto v našem příspěvku navrhujeme alternativní přístup, kdy jak koeficienty modelu, tak i rozdělení náhodné složky jsou odhadnuty současně z dat. Tento neparametrický přístup ještě vylepšíme tím, že na řešení úlohy maximalizace věrohodnostní funkce používáme diferenciální evoluce. Vhodnost našeho přístupu je ověřena na modelování forwardové prémie směnného kurzu, a to kurz české koruny vůči americkému dolaru a společné měně Euro modelem GARCH-M v období od roku 2007 do roku 2012. Stejný model je také odhadován tradičně. Ukazuje se, že náš přístup zajišťuje odhad koeficientů modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu s vyššími hodnotami věrohodnostní funkce než tradiční přístup. Také námi navržený přístup lépe kontroluje splnění podmínek kladených na odhadované parametry než tradiční přístup. Náš přístup dokáže identifikovat statisticky významný vliv podmíněný rozptyl na rizikovou prémii forwardového měnového kurzu ve všech případech ve zkoumaném období, zatímco tradiční přístup tento vliv zaznamená pouze ve dvou případech. Podle těchto výsledků se jeví, že volatilita ve měnovém kurzu ovlivňuje výši rizikové prémie forwardového měnového kurzu české koruny vůči americkému dolaru a společné měně Euro, což je v souladu s teorií.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory z grantu č. IP 100041/1020.

Literatura

[1] T. Bollerslev. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(4): 307–327, 1986.

[2] R. Hall E. Berndt, B. Hall and J. Hausman. Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models. *Annals of Economic and Social Measurement*, 3(4): 653–665, 1974.

[3] R. F. Engle. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4): 987–1007, July 1982.

[4] W. Hardle. *Applied Nonparametric Regression.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.

[5] D. Marquardt. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal on Applied Mathematics*, 11(2): 431–441, 1963.

[6] A. J. McNeil P. Bühlmann. An algorithm for nonparametric GARCH modelling. *Journal of Computational Statistics and Data Analysis*, 40: 665–683, 2002.

[7] A. Robins R. F. Engle, D. Lilien. Estimating timevarying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. *Econometrica*, 55: 391–407, 1987.

[8] K.Price R. Storn. Differential Evolution – a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization. *J. Global Optimization*, 11: 341–359, 1997.

[9] J. Tvrdík. *Evoluční algoritmy* . Učební texty Ostravské University - Přírodovědecká fakulta, Ostrava, 2004.

Quang Van Tran
Katedra bankovnictví a pojišťovnictví, Fakulta financí a účetnictví, Vysoká škola ekonomická v Praze, nám. W. Churchilla 4, Praha 3 - 130 67, email: tran@vse.cz
Jarmila Radová
Katedra bankovnictví a pojišťovnictví, Fakulta financí a účetnictví, Vysoká škola ekonomická v Praze, nám. W. Churchilla 4, Praha 3 - 130 67, email: radova@vse.cz